ME-310 Probabilidade II

Lista 0

1. Sejam A e B eventos disjuntos tais que $\mathbf{P}(A) = 0.1$ e $\mathbf{P}(B) = 0.4$. Qual é a probabilidade que
(a) A ou B ocorra;
(b) A ocorra, mas B não ocorra;
(c) repita (a) e (b) se os eventos forem independentes.

2. Considere duas urnas, a urna A e a urna B. Urna A contem 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. Urna B contem 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é retirada da urna A e colocada na urna B. Depois, uma bola é retirada da urna B.
(a) Qual é a probabilidade de que uma bola retirada da urna B seja vermelha?
(b) Se uma bola vermelha é retirada da urna B, qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido retirada da urna A?

3. Demonstre as seguintes afirmações:
(a) Se $P(A) = 0$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
(b) Se $P(A) = 1$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
(c) Os eventos D e D^c são independentes se e somente se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$;
(d) Ache uma condição para que o evento E seja independente dele mesmo.

4. Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante um ano tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Um novo remédio para prevenir resfriados reduz este parâmetro para $\lambda' = 2$ para 75% das pessoas e não faz efeito em 25% restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado 2 vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funciona para esta pessoa?

5. Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k.
(b) Calcule $\mathbf{P}(1/4 < X < 1/2)$.
(c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.
(d) Determine a f.d.a. de X.

6. O tempo que um eletrodoméstico funciona (até quebrar) tem distribuição Exponencial com média 3 anos. Se uma pessoa comprou um eletrodoméstico usado, calcule a probabilidade de que este vai durar pelo menos mais 2 anos.

7. Na fabricação de parafusos, os parafusos tem que ter diâmetro entre d_1 e d_2, senão eles são considerados defeituosos. Para controle de qualidade é feito um

teste “passa - não passa”, o parafuso é aceito, se ele não passa numa abertura de diâmetro d_1, mas passa numa abertura de diâmetro d_2. Suponha que o diâmetro D de um parafuso é uma v.a. Normal com média $(d_1 + d_2)/2$ e variância $(d_2 - d_1)^2/16$.
(a) Ache a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.
(b) Se, em vez de saber a variância, você sabe que $d_1 = 40$ mm, $d_2 = 50$ mm e que 10% dos parafusos são rejeitados, quanto valeria $\mathrm{Var}\, D$?

8. Suponha que o raio R de uma esfera seja uma v.a. contínua com densidade

$$f_R(r) = \begin{cases} 6r(1-r), & 0 < r < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ache a densidade do volume V da esfera.

9. Seja X uma v.a. com f.d.a. F_X.
(a) Seja $Y = 1 + bX$. Ache a f.d.a. de Y (considere dois casos: $b > 0$ e $b < 0$).
(b) Suponha que F_X é estritamente monótona e defina $Z = F_X(X)$. Mostre que $Z \sim U(0, 1)$.
(c) Tome $U \sim U(0, 1)$ e mostre que $W = F_X^{-1}(U)$ tem f.d.a. F_X.

10. Seja U v.a. Uniforme $(0, 1)$ e $X = \ln U$. Ache a densidade e a função geratriz de momentos de X. Usando a função geratriz de momentos, calcule $\mathbb{E}X$ e $\mathrm{Var}\, X$.

11. Para quaisquer eventos A, B e C mostre que
(a) se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$;
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

12. Numa urna há 5 bolinhas brancas, 4 verdes e 6 azuis. Escolhemos 4 bolinhas. Qual é a probabilidade de que foram escolhidas 2 bolinhas de uma cor e 2 bolinhas de outra cor? Qual é a probabilidade de que todas as bolinhas escolhidas são da mesma cor? Considere dois casos: escolha sem reposição e com reposição.

13. Seja X uma variável aleatória discreta com $\mathbf{P}(X = 0) = 0.25$, $\mathbf{P}(X = 1) = 0.125$, $\mathbf{P}(X = 2) = 0.125$, $\mathbf{P}(X = 3) = 0.5$. Calcule a função de distribuição acumulada, o valor esperado e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(0 < X < 1),\ \mathbf{P}(X \leq 1),\ \mathbf{P}(X > 2),\ \mathbf{P}(X > 2.5).$$

14. Suponha que o tempo de viagem entre sua casa e UNICAMP tem distribuição Normal com média 50 minutos e desvio padrão 4 minutos. Se você tem uma prova as 10:00 e quer que probabilidade de chegar atrasado seja no máximo 0.5%, a que horas você deve sair de casa?