

Probabilidade 2 - ME310 - Lista 2

August 26, 2018

Lembrando:

1. Distribuição de probabilidade conjunta de funções de variáveis aleatórias, pg. 330 Ross: $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \cdot |\mathbf{J}(x_1, x_2)|^{-1}$
2. Covariância: $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$
3. Variância: $Var(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

1. Sejam X e Y v.a. independentes com $X \sim Geo(p_1)$ e $Y \sim Geo(p_2)$. Determinar a lei de $Z = \min\{X, Y\}$.

Resp. 1)

Escrevemos $P(Z > k) = P(\min\{X, Y\} > k) = P(X > k, Y > k) = P(X > k)P(Y > k)$, por independência de X e Y . Portanto, se $k \geq 0$, temos $P(Z > k) = (1 - p_1)^k(1 - p_2)^k = (1 - (p_1 + p_2 - p_1p_2))^k$. Deduzimos que $Z \sim Geo(p_1 + p_2 - p_1p_2)$.

2. Seja X uma v.a. com lei $Exp(\lambda)$. Definimos uma nova v.a. $Y = [X] + 1$ onde $[\cdot]$ é a função parte inteira. Determinar a lei de Y .

Resp. 2)

Escrevemos $P(Y > k) = P([X] > k - 1) = P([X] \geq k)$. Se k é inteiro natural, temos $P([X] \geq k) = P(X \geq k) = e^{-\lambda k}$. Deduzimos que $Y \sim Geo(1 - e^{-\lambda})$.

3. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = \frac{1}{x^2 \cdot y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}}$. Calcule a densidade conjunta das variáveis $U = XY$ e $V = X/Y$.

Resp. 3)

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y) \cdot |\mathbf{J}(x, y)|^{-1}$$

$$\bullet \mathbf{J}(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = -\frac{x}{y} - \frac{x}{y} = -2 \cdot \frac{x}{y}$$

$$\bullet f_{U,V}(U, V) = \frac{\frac{1}{x^2 \cdot y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}}}{|-2 \cdot \frac{x}{y}|} = \frac{\frac{1}{x^2 \cdot y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}}}{2 \cdot \frac{x}{y}} = \frac{y}{2x} \cdot \frac{1}{x^2 y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}} = \frac{1}{2vu^2} \cdot \mathbf{I}_{\Delta}(u, v)$$

onde $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 1; 1/u < v < u\}$.

4. Sejam X e Y v.a. i.i.d. $Uniformes(0, 1)$. Calcule a densidade conjunta de

a) $U = X + Y$, $V = X/Y$

Resp. a) $f_X(a) = f_Y(a) = 1 \cdot \mathbf{I}_{\{a \in (0, 1)\}}$

$$\bullet \mathbf{J}(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}$$

- Seja $D = (0, 1)^2$. $f_{U,V}(u, v) = \frac{1 \cdot \mathbf{I}_D(x, y)}{\left| -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} \right|} = \frac{1 \cdot \mathbf{I}_D(x, y)}{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}} = \frac{1 \cdot \mathbf{I}_D(x, y)}{\frac{x+y}{y^2}} = \frac{\left(\frac{u}{1+v}\right)^2 \cdot \mathbf{I}_\Delta(u, v)}{u} = \frac{u \cdot \mathbf{I}_\Delta(u, v)}{(1+v)^2}$

onde $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < v \leq 1; 0 < u < 1 + v\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 1; 0 < u < 1 + 1/v\}$.

b) $U = X, V = X/Y$.

- $\mathbf{J}(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2}$
- $f_{U,V}(u, v) = \frac{1 \cdot \mathbf{I}_D(x, y)}{\left| -\frac{x}{y^2} \right|} = \frac{1 \cdot \mathbf{I}_D(x, y)}{\frac{x}{y^2}} = \frac{u}{v^2} \cdot \mathbf{I}_\Delta(u, v)$

onde $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1; v > u\}$.

5. Sejam X e Y v.a. independentes $Uniformes(0, 1)$. Mostre que para qualquer $\alpha > 0$: $\mathbf{E}(|X - Y|^\alpha) = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$

Resp. 5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X - Y|^\alpha) &= \int \int_{x \in (0,1), y \in (0,1)} |x - y|^\alpha dx dy = \int \int_{x < y} (y - x)^\alpha dx dy + \int \int_{x > y} (x - y)^\alpha dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^y (y - x)^\alpha dx dy + \int_0^1 \int_0^x (x - y)^\alpha dy dx = \\ &= \int_0^1 (-1) \cdot \frac{(y-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{x=0}^{x=y} dy + \int_0^1 (-1) \cdot \frac{(x-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx = \\ &= \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \end{aligned}$$

6) N bolas (numeradas de 1 até N) são distribuídas em N urnas (também numeradas de 1 até N) de forma que para cada i a bola i vai para uma das urnas $1, \dots, i$ com probabilidade $1/i$ (independentemente das outras bolas). Calcule

a) o número esperado das urnas vazias

Resp. a)

Seja $P(X_j = i) = \frac{1}{j}$ a probabilidade da j -ésima bola cair em uma urna específica i , com $1 \leq i \leq j$, então a probabilidade da j -ésima bola não cair na urna i é $P(X_j \neq i) = 1 - \frac{1}{j}$ para $1 \leq i \leq j$.

Considere o evento $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se urna } i \text{ está vazia} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$, e considere o evento $U = \sum_{i=1}^N Y_i$, “quantidade de urnas vazias”.

Temos que

$$\mathbf{E}(Y_i) = P(\text{Urna } i \text{ vazia}) = P(X_1 \neq i, X_2 \neq i, X_3 \neq i, X_4 \neq i, \dots) = \prod_{j=i}^N \left(1 - \frac{1}{j}\right)$$

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^N \prod_{j=i}^N \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{N-1}{2}.$$

b) A probabilidade de que nenhuma urna está vázia.

Resp. b)

Observe que para que isso ocorra, cada bola deve estar em exatamente uma urna.

Mas para que isso ocorra, a i -ésima bola deve estar na urna i , pois a bola 1 só pode estar na urna 1, com isso, a bola 2 que poderia estar na urna 1 ou na urna 2 fica restrita apenas à urna 2, assim por diante. Logo,

$$P(X_N = N, X_{N-1} = N-1, \dots, X_1 = 1) = \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{N!}.$$

7) Se $\mathbf{E}(X) = 1$ e $\text{Var}(X) = 2$, calcule $\mathbf{E}((2+X)^2)$ e $\text{Var}(1+3X)$

Resp. a)

- $\text{Var}(X) = 2 = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \implies \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X)^2 + 2 = 3$
- $\mathbf{E}((2+X)^2) = \mathbf{E}(4 + 4X + X^2) = \mathbf{E}(4) + 4\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X^2)$

Logo $\mathbf{E}((2+X)^2) = 4 + 4 \cdot 1 + 3 = 11$

Resp. b)

Logo $\text{Var}(1+3X) = \mathbf{E}((1+3X)^2) - \mathbf{E}((1+3X))^2 = \mathbf{E}(1+6X+9X^2) - \mathbf{E}(1+3X)^2 = \mathbf{E}(1) + 6\mathbf{E}(X) + 9\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(1+3X)^2 = 34 - (\mathbf{E}(1) + 3\mathbf{E}(X))^2 = 34 - (1 + 3 \cdot 1)^2 = 34 - 16 = 18$

8) Dois dados são lançados. Seja X a soma dos resultados, e Y a diferença (mas não o valor absoluto da diferença) entre os resultados no primeiro e no segundo dados. Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

Resp. 8)

Seja A a v.a. que representa o resultado do primeiro dado e B a v.a. que representa o resultado do segundo dado. Temos

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y)))$
- $A \sim U(1, 6)$, discreta
- $B \sim U(1, 6)$, discreta
- $X = A + B$
- $Y = A - B$

Com isso: $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((A + B - \mathbf{E}(A + B)) \cdot (A - B - \mathbf{E}(A - B))) = \mathbf{E}((A + B) \cdot (A - B) - (A + B) \cdot 0 - 7 \cdot (A - B) + 7 \cdot 0) = \mathbf{E}((A^2 - B^2 - 7 \cdot (A - B))) = \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(B^2) = 0$

9) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = \frac{1}{y} \cdot e^{-(y+\frac{x}{y})} \cdot \mathbf{1}_{\{x>0, y>0\}}$. Calcule $Cov(X, Y)$.

Resp. 9)

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$
- $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xy}{y} \cdot e^{-(y+\frac{x}{y})} dx dy = \int_0^\infty e^{-y} (\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{y}} dx) dy = \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = \Gamma(3) = 2.$
- $\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x}{y} e^{-(y+\frac{x}{y})} dx dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} (\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{y}} dx) dy = \int_0^\infty y \cdot e^{-y} dy = \Gamma(2) = 1.$
- $\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y+\frac{x}{y})} dx dy = \int_0^\infty e^{-y} (\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx) dy = \int_0^\infty y \cdot e^{-y} dy = \Gamma(2) = 1.$
- Com isso a solução é $Cov(X, Y) = 2 - 1 = 1.$

10) Seja $X \sim U(-\pi, \pi)$, e considere v.a. $Y = \text{sen}(X)$, $Z = \text{cos}(X)$.

a) As v.a. Y, Z são independentes?

Resp. a)

- As v.a. X e Y não são independentes! De fato, em primeiro lugar, devido ao fato que $X^2 + Y^2 = 1$, o ponto de coordenadas (X, Y) está no círculo unitário em R^2 . Agora, sejam $A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ e $B = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, observe que $P[Y \in B | X \in A] = 1$ (fazer um desenho do círculo). No entanto, é fácil ver que $P[Y \in B] < 1$ (fazer de novo um desenho). Assim,

$$P[Y \in B | X \in A] \neq P[Y \in B]$$

o que mostra que X e Y não são independentes.

b) Calcule $\mathbf{E}(Y)$

*) Aqui eu não estou usando a média do jeito usual com densidade da variável, estou fazendo a média de seno em torno do círculo trigonométrico, $2 \cdot \pi$ é a área do círculo e a integral é a soma dos valores possíveis. Se fosse feito usando a definição formal de esperança e a densidade de y , o resultado seria o mesmo

Resp. b)

$$\bullet \mathbf{E}(Y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{sen}(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot \text{cos}(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{-(-1) - (-(-1))}{2 \cdot \pi} = 0$$

c) Calcule $\mathbf{E}(Z)$

*) Aqui eu não estou usando a média do jeito usual com densidade da variável, estou fazendo a média de cosseno em torno do círculo trigonométrico, $2 \cdot \pi$ é a área do círculo e a integral é a soma dos valores possíveis. Se fosse feito usando a definição formal de esperança e a densidade de z , o resultado seria o mesmo

Resp. c)

$$\bullet \mathbf{E}(Z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{cos}(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot \text{sen}(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 - 0 = 0$$

d) $\text{Cov}(Y, Z)$

*) Aqui eu não estou usando a média do jeito usual com densidade conjunta, estou fazendo a média de $\text{Sen}(x) \cdot \text{Cosseno}(x)$ em torno do círculo trigonométrico, $2 \cdot \pi$ é a área do círculo e a integral é a soma dos valores possíveis. Observe que nesse caso, não teríamos como calcular a esperança do jeito usual, pois não temos a densidade conjunta de Y, Z e elas não são independentes.

$$\bullet E(YZ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \text{cos}(x)^2 \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

$$\bullet \text{Cov}(Y, Z) = \mathbf{E}(YZ) - \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}(Z) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

Conclusão, elas são variáveis dependentes com Covariância 0.

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012.
Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

<https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012>

ou diretamente no repositório do github:

<https://github.com/eric-lobes/Probabilidade2>

Bons estudos,
Eric.