Probabilidade 2 - ME310 - Lista 5

December 2, 2016

Lembrando:

1. Convergência de sequências em L^p (também chamada de convergência em média p): se $\underset{n\to\infty}{lim}\mathbf{E}(|X_n - X_0|^p) \to 0$ quando $n \to \infty$, então a sequência definida por X_n é dita convergente para X_0 em L^p ($X_n \overset{L^p}{\to} X_0$)

2. Convergência em probabilidade: se $\underset{n\to\infty}{lim} P(|X_n - X_0| \geq \epsilon) \to 0$ com $\epsilon > 0$ dado, quando $n \to \infty$, então a sequência definida por X_n é dita convergente para X_0 em probabilidade ($X_n \overset{prob.}{\to} X_0$). Outra maneira equivalente de escrever é: $\underset{n\to\infty}{lim} P(|X_n - X_0| < \epsilon) \to 1$

3. Convergência quase certa: se $P(\left\{\omega \in \Omega | \underset{n\to\infty}{lim} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}) = 1$ então $X_n \overset{q.c.}{\to} X$ (X_n é dito convergente quase certamente para X). Essa talvez seja a convergência mais complicada dentre as estudadas, tenha em mente que SE sabemos $X_n(\omega)$ (relacionar a distribuição com os valores do espaço amostral), então basta mostrar que o conjunto de ω para os quais $X_n \to X$ tem probabilidade 1 (há um número finito de ω para os quais não vale $X_n \to X$). Caso não saibamos à priori identificar X_n em função de ω podemos usar (5) o lema de Borel-Cantelli da seguinte forma: Seja $\epsilon > 0$ e $A_n = \{|X_n - X| > \epsilon\}$, calculamos $P(A_n)$, Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ então com probabilidade 1, um número finito dos eventos A_n vai ocorrer, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar N tal que, para todo $n \geq N$ temos que A_n não ocorre (ou seja, $X_n \overset{q.c.}{\to} X$). Se caso contrario, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ e os eventos são independentes, então com prob. 1 existe subsequência infinita $n_1, n_2, ...$ tal que A_{n_i} ocorre, ou seja, $|X_{n_i} - X| > \epsilon \implies X_n$ não converge para X quase certamente.

4. Convergência em distribuição: se $\underset{n\to\infty}{lim} F_{X_n}(a) = F_X(a)\ \forall a$, então X_n é dito convergente em distribuição para X para todo a onde $F_X(a)$ é continua.

5. Lema de Borel-Cantelli: Seja um evento $\{A_n\}$ com probabilidade de ocorre $P(A_n) = h(n)$, se $\sum h(n) \to +\infty$ e os eventos são independetes o evento ocorre um número infinito de vezes; se $\sum h(n) \to constante$ o evento

ocorre um número finito de vezes; (e se $\sum h(n) \to -\infty$, você errou alguma coisa... $P(A_n) = h(n) \geq 0$)

6. Limite fundamental: $\underset{n\to\infty}{lim}(1+\frac{k}{n})^n = e^k$

7. LEI DOS GRANDES NÚMEROS: Seja uma sequência $\{X_n, n \geq 1\}$ de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, vamos definir $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_n$ e $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$, $A_n = \mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_k$
   - Lei fraca dos grandes números: dizemos que $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfaz a lei fraca dos grandes números se $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} - \frac{A_n}{n} \overset{Prob.}{\to} 0$
   - Lei forte dos grandes números: dizemos que $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfaz a lei forte dos grandes números se $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} - \frac{A_n}{n} \overset{q.c.}{\to} 0$

8. Teorema de Kolmogorov:
   - $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.. A existência de $\mathbf{E}(|X_1|)$ é condição necessária e suficiente para que a sequência $\{X_n\}$ satisfaça a lei forte dos grandes números e $\frac{S_n}{n} \overset{q.c.}{\to} \mu$, onde $\mu = \mu_1$
   - (Outro teorema de Kolmogorov): Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com segundo momento finito e $Var(X_n) < \infty$ se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$ então $\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n} \overset{q.c.}{\to} 0$

9. TEOREMA DO LIMITE CENTRAL: Seja $X_1, X_2, ...X_n$ um conjunto de n variáveis independentes cada uma com média μ e variância finita σ^2. Então:
$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1)$$
   Outra forma (bastante útil) de enunciar o TLC é dizer que $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(X - \mu) \overset{d}{\to} N(0,1)$; em que $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$.

10. Implicações: $L^p \implies prob. \implies distrib.$ e $q.c. \implies prob. \implies distrib.$

11. Manipulações em Variáveis com distribuição normal: Sejam $X \sim N(\mu_X; \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$ independentes e k constante então:
   - $V = kX \sim N(k \cdot \mu_X; k^2 \cdot \sigma_X^2)$
   - $V = k + X \sim N(k + \mu_X; \sigma_X^2)$
   - $V = X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y; \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$
   - $V = X-Y \sim N(\mu_X-\mu_Y; \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$ (Observe que é + na variância. Essa é uma fonte grande de erros!)

1) Dê um exemplo de sequência $X_1, X_2, ...$ tal que $X_n \to 0$ em L^1 , mas não em L^2

Resp. a1)

Basta aplicar a definição de 1, tentando um 'passo inverso' para achar algum exemplo em que não funcione

- Seja a sequência definida por $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ e $P(X_n = k) = 0$ nos demais casos , dessa forma $\mathbf{E}(\left|X_n - 0\right|^1) = \mathbf{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{i=n} i \cdot P(X_n = i) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$, mas $\mathbf{E}(\left|X_n - 0\right|^2) = \mathbf{E}(X_n^2) = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 \cdot P(X_n = i) = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \to 1 \neq 0$

Resp. a2)

- UM EXEMPLO ERRADO! Seja a sequência definida por $X_n \sim Normal(0, 1+\frac{1}{n})$, temos $\mathbf{E}(X_n) = 0$, $\mathbf{E}(X_n^2) = \sigma^2 + \mathbf{E}(X_n)^2 = 1 + \frac{1}{n} + 0 \to 1 \neq 0...$ o que tem de errado aqui ? usamos isso $\mathbf{E}(X_n) = 0$, mas na definição, é pedido a esperança do MÓDULO elevado a p, ou seja, $\mathbf{E}(\left|X_n - 0\right|^1) > 0$ não satisfazendo as condições para ser L^1 , esse é um tipo de erro muito fácil de cometer.

2) Sejam $X_1, X_2, ...$ v.a. i.i.d. Uniformes (0,1). Mostre que $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade, mas não quase certamente.

Resp.) para mostrar isso, temos que provar que as restrições descritas em 2 são válidas:

- Queremos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|n^{-X_n} - 0\right| < \epsilon) \to 1$,

Considere $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|n^{-X_n} - 0\right| < \epsilon)$, uma observação importante é que $X_n \in [0,1]$,

Podemos fazer transformações nos dois lados da desigualdade, considere a transformação logaritmica $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|n^{-X_n} - 0\right| < \epsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} P(ln(\left|n^{-X_n}\right|) < ln(\epsilon)) = \lim\limits_{n\to\infty} P(-X_n < \frac{ln(\epsilon)}{ln(|n|)}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n > -\frac{ln(\epsilon)}{ln(|n|)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\frac{ln(\epsilon)}{ln(|n|)}}^{1} 1dx = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(\epsilon)}{ln(|n|)} = 1$

logo, converge em probabilidade.

- Agora vamos tentar mostrar que não converge quase certamente:

Considere $\epsilon > 0$ e $A_n = \left\{\left|n^{-X_n} - 0\right| > \epsilon\right\}$ disso temos que $P(A_n) = P(\left|n^{-X_n}\right| > \epsilon) = P(ln(\left|n^{-X_n}\right|) > ln(\epsilon)) = P(X_n < -\frac{ln(\epsilon)}{ln(|n|)}) =$

$$\int_{x=0}^{x=-log_{|n|}(\epsilon)} \mathbf{I}_{\{0<x<\infty\}} dx = \begin{cases} 0 & se\ -log_{|n|}(\epsilon) < 0 \\ -log_{|n|}(\epsilon) & se\ 0 \leq -log_{|n|}(\epsilon) \leq 1 \\ 1 & se\ -log_{|n|}(\epsilon) > 1 \end{cases}$$

Vamos calcular $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n=k} P(A_n) = -log_1(\epsilon) - log_2(\epsilon) - log_3(\epsilon) - ...$, mas existe n_0 tal que $\epsilon \leq n_i^{-1}$ para todo $n_i \geq n_0$, logo $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n=k} log_{|n|}(\epsilon) = -log_1(\epsilon) - log_2(\epsilon) - log_3(\epsilon) - ... \geq \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=n_0}^{n=k} 1 \to \infty$, mostrando que a sequência denotada por n^{-X_n} não converge quase certamente.

3) Sejam $X_1, X_2, ...$ v.a. independentes, $X_n \sim U(0, a_n)$. Mostre que

a) Se $a_n = n^2$, então com probabilidade 1 somente um número finito de X_n's toma valores menores que 1;

Resp. a)

Considere o avento $A_n = \{X_n < 1\}$

- $P(A_n) = P(X_n < 1) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{a_n} dx = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{n=\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = 2 < \infty \implies A_n$ ocorre um número finito de vezes

b) Se $a_n = \sqrt{n}$, então com probabilidade 1 um número infinito de X_n's toma valores menores que 1;

Resp. b)

Considere o avento $A_n = \{X_n < 1\}$

- $P(A_n) = P(X_n < 1) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{a_n} dx = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \sum_{n=1}^{n=\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \to \infty \implies A_n$ ocorre um número infinito de vezes

4. Construa exemplos (diferentes dos dados na aula) que mostram que:

a) convergência em probabilidade não implica na convergência quase certa.

b) convergência em L^p não implica na convergência quase certa.

c) convergência quase certa não implica na convergência em L^p.

5) Sejam $X_1, X_2, ...$ v.a. i.i.d. Uniformes (0, 1) e sejam $Y_n = minX_1, ..., X_n$, $Z_n = maxX_1, ..., X_n$, $U_n = nY_n$. Mostre que, quando n $\to \infty$,

a) $Y_n \to 0$, $Z_n \to 1$ em probabilidade;

Resp. a)

- $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|minX_1, ..., X_n - 0| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(minX_1, ..., X_n \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(minX_1, ..., X_n \geq \epsilon) \overset{ind.}{=} \lim_{n\to\infty} (P(X \geq \epsilon))^n = \lim_{n\to\infty} (1-\epsilon)^n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - 1| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|maxX_1, ..., X_n - 1| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(1 - maxX_1, ..., X_n \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(maxX_1, ..., X_n \leq 1-\epsilon) \overset{ind.}{=} \lim_{n\to\infty} P(X_1 \leq 1-\epsilon)^n = \lim_{n\to\infty} (1-\epsilon)^n = 0$

b) $U_n \to exp(1)$ em distribuição

Resp. b)

- Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(a) = F_{exp(1)}(a)$

$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(a) = \lim_{n\to\infty} P(U_n \leq a) = \lim_{n\to\infty} P(nY_n \leq a) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq a/n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(Y_n > a/n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(minX_1, ..., X_n > a/n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(X_1 > a/n)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{a}{n})^n \overset{6}{=} 1 - e^{-a} = \int_{-\infty}^{a} 1 \cdot e^{-1 \cdot u} du = F_{exp(1)}(a)$

6) Ache o limite (quase certo) da sequência $Y_1, Y_2, ...$ onde $Y_n = \frac{1}{n}(X_1^\alpha + ... + X_n^\alpha)$, $X_1, X_2, ...$ são i.i.d. Uniformes (0, 1) e $\alpha > 0$.

Resp.) Considere a variável aleatória $V_n = X_n^\alpha$, observe que $\mathbf{E}(V_n) = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \infty$, logo, pelo teorema de Kolmogorov (8) a soma definida como $S_n = \frac{1}{n}(V_1 + V_2 + ... + V_n)$ satisfaz $\frac{S_n}{n} \overset{q.c.}{\to} \frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$, mas $Y_n = \frac{S_n}{n}$ logo, por (8), mostrei que $Y_n \overset{q.c.}{\to} \frac{1}{\alpha+1}$

7) Sejam $X_1, X_2, ...$ v.a. i.i.d. com $\mathbf{E}(X_i) = Var(X_i) = 1$. Mostre que

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}} \overset{q.c.}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resp.

Considere $U_n = \frac{\sum X_i}{n}$, como $\mathbf{E}(X_i) < \infty$ então $U_n \overset{q.c.}{\to} 1$.

Considere $W_n = \frac{\sum X_i^2}{n}$, como $\mathbf{E}(X_i^2) = Var(X_i) + 1^2 = 2 < \infty$ então $W_n \overset{q.c.}{\to} 2$

Considere $V_n = \frac{\sqrt{n \sum X_i^2}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n \sum X_i^2}}{n} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n}} = \sqrt{W_n} \overset{q.c.}{\to} \sqrt{2}$ por (9).

$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}} = \frac{1/n}{1/n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}{n}}} = \frac{U_n}{V_n} \overset{q.c.}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}$

8) As v.a. $X_1, X_2, \ldots$ são independentes, $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = 1/2$, n = 1, 2, ... Mostre que:

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2} \overset{Prob.}{\to} 0$$

Resp.) Vamos apelar. Observe que é muito mais fácil mostrar que converge quase certamente do que em probabilidade e como convergência quase certa implica em convergência em probabilidade, temos o resultado esperado:

- $\mathbf{E}(X_i) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} = 0$
- $Var(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(X_i)^2 = \mathbf{E}(X_i^2) = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2$
- Considere a Variável aleatoria $Y_i = \frac{X_i}{n}$, temos $P(Y_i = 1) = P(X_i = n) = P(X_i = -n) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$
- Com isso, temos $\mathbf{E}(Y_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ e $Var(Y_i) = \mathbf{E}(Y_i^2) - \mathbf{E}(Y_i)^2 = \mathbf{E}(Y_i^2) = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 1 < \infty$, além disso $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{Var(Y_k)}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n^2} \to 2 < \infty$. Podemos usar o teorema de Kolmogorov (8) e $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k}{n} \overset{q.c.}{\to} 0$, mas $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2}$ logo $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2} \overset{q.c.}{\to} 0$ e disso temos que $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2} \overset{Prob.}{\to} 0$

9) A cada aposta, o jogador perde 1 R$ com probabilidade 0.7, perde 2 R$ com probabilidade 0.2 ou ganhe 10 R$ com probabilidade 0.1. Calcule (aproximadamente) a probabilidade de que este jogador estará perdendo depois de 100 apostas (ganho negativo).

Resp.)

- temos que: $P(X = -1) = 0,7; P(X = -2) = 0,2; P(X = +10) = 0,1$
- $\mathbf{E}(X) = -0,7 - 2 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,1 = -0,1$
- $Var(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = (-1)^2 \cdot 0,7 + (-2)^2 \cdot 0,2 + (10)^2 \cdot 0,1 - 0,1^2 = 11,49$
- Considere $S_{100} = \sum_{n=1}^{n \to 100} X$
- Usando o Teorema do Limite central (10), temos que $P(S_{100} \le 0) = P(\frac{S_{100} - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}} \le \frac{-n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}) = \phi(\frac{-n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}) = \phi(\frac{100 \cdot 0,1}{\sqrt{11,49 \cdot 100}}) = \phi(0,295) \cong 0,616$.

10) O número dos dias que uma certa componente funciona até falhar é uma v.a. com densidade $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$. A componente que falha é reposta imediatamente. Quantas componentes precisamos ter no estoque para que a probabilidade de que o estoque vai durar pelo menos 35 dias seja 0.95?

Resp.)

- $\mathbf{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$
- $Var(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$
- $P(S_n \geq 35) = P(\frac{S_n - n\cdot\mu}{\sqrt{Var(X)\cdot n}} \geq \frac{35-n\cdot\mu}{\sqrt{Var(X)\cdot n}}) \cong 1 - \phi(\frac{35-n\cdot\mu}{\sqrt{Var(X)\cdot n}}) = 0,95$
- Assim: $\phi(\frac{35-n\cdot\mu}{\sqrt{Var(X)\cdot n}}) = 0,05 \implies \frac{35-n\cdot\mu}{\sqrt{Var(X)\cdot n}} = -1,645 \implies n = 56,8866 \cong 57$ Componentes

11) Os engenheiros civis acreditam que o peso (em toneladas) que uma certa ponte pode suportar sem sofrer danos estruturais tem distribuição Normal com média 200 e desvio padrão 20. Suponha que o peso de um carro é uma v.a. (não necessariamente Normal) com média 1 e desvio padrão 0.2. Quantos carros podem passar simultaneamente por esta ponte sem que a probabilidade de danos estruturais exceda 0.01?

Resp.)

- $P \sim N(200; 20^2)$ - peso que a ponte pode suportar antes de sofrer danos estruturais
- C_i é o peso de um carro qualquer, tal que $\mu = \mathbf{E}(C_i) = 1$; $\sigma^2 = Var(C_i) = 0,2^2$
- Considere a variável aleatória $N_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i$
- Pelo TLC (10) temos que $\frac{N_n - n\cdot\mathbf{E}(C_i)}{\sqrt{Var(C_i)\cdot n}} \sim N(0,1) \implies N_n \sim N(n\cdot\mu; n\cdot\sigma^2)$
- Queremos $P(N_n \geq P) = P(N_n - P \geq 0) \leq 0,01$, mas ambas as variáveis são aproximadamente normais, podemos aplicar subtração de normais: Considere $V_n = N_n - P \sim N(n\cdot\mu - 200; n\cdot\sigma^2 + 20^2)$, para simplificar as manipulações, connsidere também $k = n\cdot\mu - 200$ e $w = n\cdot\sigma^2 + 20^2$. Dessa forma, queremos $P(V_n \geq 0) \leq 0,01$ com $V_n \sim N(k; w)$.

- Agora vamos manipular: $P(V_n \geq 0) = 1 - P(V_n < 0) = 1 - P(\frac{V_n - k}{\sqrt{w}} < \frac{0-k}{\sqrt{w}}) = 1 - \phi(\frac{-k}{\sqrt{w}}) = 1 - (1 - \phi(\frac{k}{\sqrt{w}})) = \phi(\frac{k}{\sqrt{w}}) < 0,01$. Observe que a transformação $\frac{V_n - k}{\sqrt{w}}$ é a que faríamos para tranformar uma variável normal na forma padrão.

- disso temos $\phi(\frac{k}{\sqrt{w}}) < 0,01 \implies \frac{k}{\sqrt{w}} < -2,326 \implies \frac{n \cdot \mu - 200}{\sqrt{n \cdot \sigma^2 + 20^2}} = \frac{n \cdot 1 - 200}{\sqrt{n \cdot 0,04 + 20^2}} < -2,326 \implies n \cong 153$ Carros.

12) As notas dos alunos do curso de estatística tem média 7,4 e desvio padrão 1,4 (suponha que as notas são v.a. independentes). O professor vai dar duas provas, uma para turma de 25 alunos e outra para uma turma de 64 alunos. Calcule (aproximadamente):

- Para esse problema temos: $\mu = \mathbf{E}(X_i) = 7,5$; $\sigma = 1,4$; X_i iid; $C_1 = 25$ Alunos; $C_2 = 64$ Alunos; $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$

a) A probabilidade de que a nota média da turma seja pelo menos 8.0 (para as duas turmas);

Resp. a)
Queremos:

1. $P(\frac{S_{25}}{25} \geq 8) = P(\frac{S_{25} - 25\mu}{\sigma\sqrt{25}} \geq \frac{25 \cdot 8 - 25\mu}{\sigma\sqrt{25}}) = 1 - \phi(\frac{25 \cdot 8 - 25\mu}{\sigma\sqrt{25}}) = 1 - \phi(\frac{25 \cdot 8 - 25 \cdot 7,4}{1,4 \cdot \sqrt{25}}) = 1 - \phi(2,14) = 1 - 0,9838 \cong 0,016$
2. $P(\frac{S_{64}}{64} \geq 8) = P(\frac{S_{64} - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}} \geq \frac{64 \cdot 8 - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}}) = 1 - \phi(\frac{64 \cdot 8 - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}}) = 1 - \phi(\frac{64 \cdot 8 - 64 \cdot 7,4}{1,4 \cdot \sqrt{64}}) = 1 - \phi(3,428) \cong 0,0003$

b) A probabilidade de que a nota média da turma maior exceda a nota média da turma menor em pelo menos 0.22.

Resp. b)
Queremos $P(\frac{S_{64}}{64} \geq \frac{S_{25}}{25} + 0,22)$

- Como pelo TLC: $\frac{\sqrt{64}}{\sigma} \cdot (\frac{S_{64}}{64} - \mu) \xrightarrow{d} N(0;1)$ então $\frac{S_{64}}{64} \xrightarrow{d} N(\mu; \frac{\sigma^2}{64})$; da mesma forma $\frac{\sqrt{25}}{\sigma} \cdot (\frac{S_{25}}{25} - \mu) \xrightarrow{d} N(0;1)$ então $\frac{S_{25}}{25} \xrightarrow{d} N(\mu; \frac{\sigma^2}{25})$

- Denote $Y = \frac{S_{64}}{64} - \frac{S_{25}}{25}$ pelo TLC $Y \sim N(0; \frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25})$ e queremos $P(Y \geq 0,22)$, como Y é aproximadamente uma Normal, vamos fazer a transformação $Z = \frac{Y - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}}} \sim N(0;1)$ assim nosso trabalho se resume a calcular $P(Z \geq \frac{0,22}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}}}) = 1 - \phi(\frac{0,22}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}}}) = 1 - \phi(\frac{0,22}{\sigma \cdot 0,2358}) = 1 - \phi(\frac{0,22}{1,4 \cdot 0,2358}) = 1 - \phi(0,6664) = 1 - 0.7474 \approx 0,25$.

13) Um dado honesto é lançado até que a soma dos resultados exceda 300. Qual é a probabilidade de que serão necessários pelo menos 80 lançamentos?

Resp.) Aqui temos que perceber que a probabilidade de em 80 ou mais lançamentos para alcançarmos soma maior que 300 equivale a probabilidade de em exatamente 79 lançamentos não termos alcançado soma 300, assim

- $P(\sum_{i=1}^{i=79} N_i \leq 300) = P(\frac{\sum_{i=1}^{i=79} N_i - 79\cdot\mu}{\sqrt{79\cdot\sigma^2}} \leq \frac{300-79\cdot\mu}{\sqrt{79\cdot\sigma^2}}) = \phi(\frac{300-79\cdot\mu}{\sqrt{79\cdot\sigma^2}})$
- Sabemos que nossas variáveis aleatórias $N_i \sim U(1,6)$ discreta logo $\mu = 3,5$ e $\sigma^2 = \frac{35}{12}$ $(Var(U) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12})$
- Com isso:$P(\sum_{i=1}^{i=79} N_i \leq 300) = \phi(\frac{300-79\cdot 3,5}{\sqrt{79\cdot(35/12)}}) = \phi(1,548) = 0.93919$

14) Um dado honesto é lançado 43 vezes. Calcule a probabilidade aproximada que a média geométrica dos resultados é pelo menos 2,33. Obs.: a média geométrica de $a_1, ..., a_n$ é $(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$.

Resp.)

O truque aqui é usar logaritmo para transformar os valores a ser calculados.

- Observe que ln é crescente e como o valor mínimo do dado é 1, então $ln(1) = 0$ nesse caso (não precisamos nos preocupar com valores negativos de logaritmo \0/), agora ficou fácil
- $P((a_1 \cdots a_n)^{1/n} \geq 2,33) = P(ln((a_1 \cdots a_n)^{1/n}) \geq ln(2,33)) = P(\frac{1}{n} \cdot ln(a_1 \cdots a_n) \geq ln(2,33)) = P(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} a_i \geq ln(2,33))$
- Sabemos que $a_i \sim U(1,6)$ discreta, sabemos que $\mathbf{E}(ln(a_i)) = \sum_{i=1}^{i=6} \frac{ln(i)}{6} = 1,0965$ e $\mathbf{E}(ln(a_i)^2) = \sum_{i=1}^{i=6} \frac{ln(i)^2}{6} = 1,5683$ com isso temos que $\sigma^2 = \mathbf{E}(ln(a_i)^2) - \mathbf{E}(ln(a_i))^2 = 1,5683 - 1,0965^2 = 0,366$; podemos calcular também $ln(2,33) = 0,845868268$
- $P((a_1 \cdots a_n)^{1/n} \geq 2,33) = P(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} a_i \geq ln(2,33)) = 1 - P(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} a_i < ln(2,33)) = 1 - \phi(\frac{n \cdot ln(2,33) - n \cdot 1,0965}{\sqrt{0,366 \cdot n}}) = 1 - \phi(\frac{43 \cdot ln(2,33) - 43 \cdot 1,0965}{\sqrt{0,366 \cdot 43}}) =$
- r$1 - \phi(-2.7166) = \phi(2.7166) = 0.99670$

15) Sejam $X_1, X_2, ...$ v.a. i.i.d. com $\mathbf{E}(X_1) = 0$ e $\mathbf{E}(X_1^2) = 2$. Ache o limite em distribuição da sequência $Y_1, Y_2, ...$, onde

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2}$$

Resp.)

Sabemos que X_i tem esperança e segundo momento finitos, sabemos também a variância ($\sigma^2 = \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) = 2$). Que cai como uma luva para o Teorema de Kolmogorov (8), já que $\sum_{n=1}^{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$.

Primeiro, vamos reescrever a sequência de uma forma mais adequada $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n)\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2}$

aqui temos duas subsequências convergentes:

$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2} = \sqrt{\frac{X_1^2 + ... + X_n^2}{n}} \overset{q.c.}{\to} \sqrt{2}$ (Teo. Kolmogorov) e $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n) \overset{distr.}{\to} N(0;1)$ (TLC) sabemos que $\sigma = \sqrt{2}$ logo $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n) \overset{distr.}{\to} N(0;2)$. Dessa forma $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2} \overset{distr.}{\to} \sqrt{2} \cdot N(0;2) = N(0;4)$.

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012. Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

$https://groups.google.com/forum/?fromgroups\#!forum/me310{-}2s{-}2012$

ou diretamente no repositório do github:

$$https://github.com/eric-lopes/Probabilidade2$$

Bons estudos,
Eric.