

## Probabilidade 2 - ME310 - Lista 2

August 26, 2018

Exercício 1. Sejam  $X$  e  $Y$  v.a. independentes com  $X \sim Geo(p_1)$  e  $Y \sim Geo(p_2)$ . Determinar a lei de  $Z = \min\{X, Y\}$ .

Exercício 2. Seja  $X$  uma v.a. com lei  $Exp(\lambda)$ . Definimos uma nova v.a.  $Y = [X] + 1$  onde  $[\cdot]$  é a função parte inteira. Determinar a lei de  $Y$ .

Exercício 3. A densidade conjunta das v.a.  $X$  e  $Y$  é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbf{1}_{[1, \infty)^2}(x, y).$$

Calcule a densidade conjunta das variáveis  $U = XY$  e  $V = X/Y$ .

Exercício 4. Sejam  $X$  e  $Y$  v.a. i.i.d. com lei  $U(0, 1)$ . Calcule a densidade conjunta de

a)  $U = X + Y$ ,  $V = X/Y$

b)  $U = X$ ,  $V = X/Y$ .

Exercício 5. Sejam  $X$  e  $Y$  v.a. independentes com lei  $U(0, 1)$ . Mostre que para qualquer  $\alpha > 0$ :

$$\mathbf{E}(|X - Y|^\alpha) = \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

Exercício 6.  $N$  bolas (numeradas de 1 até  $N$ ) são distribuídas em  $N$  urnas (também numeradas de 1 até  $N$ ) de forma que para cada  $i$  a bola  $i$  vai para uma das urnas  $1, \dots, i$  com probabilidade  $1/i$  (independentemente das outras bolas). Calcule

a) o número esperado das urnas vazias.

b) A probabilidade de que nenhuma urna está vazia.

Exercício 7. Se  $\mathbf{E}(X) = 1$  e  $\text{Var}(X) = 2$ , calcule  $\mathbf{E}((2 + X)^2)$  e  $\text{Var}(1 + 3X)$ .

Exercício 8. Dois dados são lançados. Seja  $X$  a soma dos resultados, e  $Y$  a diferença (mas não o valor absoluto da diferença) entre os resultados no primeiro e no segundo dados. Calcule  $\text{Cov}(X, Y)$ .

Exercício 9. A densidade conjunta das v.a.  $X$  e  $Y$  é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})} \mathbf{1}_{(0, \infty)^2}(x, y).$$

Calcule  $\text{Cov}(X, Y)$ .

Exercício 10. Seja  $X \sim U(-\pi, \pi)$ , e considere as v.a.  $Y = \sin X$ ,  $Z = \cos X$ .

a) As v.a.  $Y$ ,  $Z$  são independentes?

b) Calcule  $\mathbf{E}Y$ ,  $\mathbf{E}Z$  e  $\text{Cov}(Y, Z)$ .