

Probabilidade 2 - ME310 - Lista 2

August 26, 2018

Exercício 1. Sejam X e Y v.a. independentes com $X \sim Geo(p_1)$ e $Y \sim Geo(p_2)$. Determinar a lei de $Z = \min\{X, Y\}$.

Exercício 2. Seja X uma v.a. com lei $Exp(\lambda)$. Definimos uma nova v.a. $Y = [X] + 1$ onde $[\cdot]$ é a função parte inteira. Determinar a lei de Y .

Exercício 3. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbf{1}_{[1, \infty)^2}(x, y).$$

Calcule a densidade conjunta das variáveis $U = XY$ e $V = X/Y$.

Exercício 4. Sejam X e Y v.a. i.i.d. com lei $U(0, 1)$. Calcule a densidade conjunta de

a) $U = X + Y$, $V = X/Y$

b) $U = X$, $V = X/Y$.

Exercício 5. Sejam X e Y v.a. independentes com lei $U(0, 1)$. Mostre que para qualquer $\alpha > 0$:

$$\mathbf{E}(|X - Y|^\alpha) = \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

Exercício 6. N bolas (numeradas de 1 até N) são distribuídas em N urnas (também numeradas de 1 até N) de forma que para cada i a bola i vai para uma das urnas $1, \dots, i$ com probabilidade $1/i$ (independentemente das outras bolas). Calcule

a) o número esperado das urnas vazias.

b) A probabilidade de que nenhuma urna está vazia.

Exercício 7. Se $\mathbf{E}(X) = 1$ e $\text{Var}(X) = 2$, calcule $\mathbf{E}((2 + X)^2)$ e $\text{Var}(1 + 3X)$.

Exercício 8. Dois dados são lançados. Seja X a soma dos resultados, e Y a diferença (mas não o valor absoluto da diferença) entre os resultados no primeiro e no segundo dados. Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercício 9. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})} \mathbf{1}_{(0, \infty)^2}(x, y).$$

Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercício 10. Seja $X \sim U(-\pi, \pi)$, e considere as v.a. $Y = \sin X$, $Z = \cos X$.

a) As v.a. Y , Z são independentes?

b) Calcule $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}Z$ e $\text{Cov}(Y, Z)$.