

ME-310 Probabilidade II

Lista 3

1. Seja X uma v.a. Exponencial com parâmetro λ . Calcule $E(X^2 | X < 2)$.
2. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = 2e^{-2x}/x$, se $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$ (e $f(x, y) = 0$, caso contrário). Calcule $\mathbb{E}(Y^3 | X)$.
3. Pedro se perdeu na mata e pode escolher uma das 3 trilhas. Se ele escolher a primeira trilha, ele vai caminhar por 2 horas e voltar ao mesmo lugar; se ele escolher a segunda, ele vai caminhar por 6 horas e sairá da mata; se ele escolher a terceira, ele vai caminhar por 4 horas, e voltar ao mesmo lugar. Seja X o tempo até Pedro sair da mata. Calcule $\mathbb{E}X$ se
 - (a) Pedro sempre escolhe uma das trilhas ao acaso;
 - (b) Pedro não pega o mesmo caminho errado duas vezes.
4. Uma moeda viciada, com $\mathbf{P}(\text{cara}) = p$ é lançada até obter 3 caras seguidas. Calcule o número médio dos lançamentos necessários.
5. Suponha que X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ , onde λ é uma v.a. Exponencial com parâmetro 1. Mostre que $\mathbf{P}(X = n) = (1/2)^{n+1}$.
6. Numa gaveta tem 3 moedas. Seja $p_i = \mathbf{P}(\text{cara no lançamento da moeda } i)$. Suponha que $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$ e $p_3 = 0.5$. Uma moeda destas 3 é escolhida ao acaso e lançada 10 vezes. Seja N o número de caras. Calcule $\mathbf{P}(N = k)$, $k = 0, \dots, n$. Se depois de cada lançamento a moeda é colocada de volta (e para próximo lançamento escolhemos uma moeda ao acaso de novo) N terá distribuição binomial?
7. Sejam X e Y v.a. i.i.d. Geométricas com parâmetro p . Ache a distribuição condicional de X dado $X + Y = n$.

Dica:

Seja W o número de tentativas para obter r sucessos no total numa sequência de experimentos independentes com probabilidade de sucesso p em cada experimento. Então W tem distribuição binomial negativa com parâmetros r, p e

$$\mathbf{P}(W = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots$$

8. Sejam X_1, X_2, \dots v.a. independentes, com $\mathbb{E}X_i = \mu$ e $\text{Var } X_i = \sigma^2$ para todo i . Seja $N \in \{0, 1, \dots\}$ uma v.a. independente dos X_i 's. Usando a fórmula para variância condicional, mostre que

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}N \sigma^2 + \mu^2 \text{Var } N.$$

9. Mostre que

$$\text{Cov}(X, \mathbb{E}(Y | X)) = \text{Cov}(X, Y).$$

10. Suponha que se o pai tem altura x cm, então o filho, quando adulto, tem altura que é uma v.a. Normal com média $x + 1$ e variância 4. Qual é a melhor estimativa para a altura do filho de um homem com altura 180 cm?

11. Mostre que $a = \mathbb{E}X$ minimiza $\mathbb{E}(X - a)^2$.