ME-310 Probabilidade II

Lista 5

1. Dê um exemplo de sequência $X_1, X_2, \ldots$ tal que $X_n \to 0$ em L^1, mas não em L^2.

2. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. Uniformes $(0,1)$. Mostre que $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade, mas não quase certamente.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes, $X_n \sim U(0, a_n)$. Mostre que
(a) se $a_n = n^2$, então com probabilidade 1 somente um número finito de X_n's toma valores menores que 1;
(b) se $a_n = \sqrt{n}$, então com probabilidade 1 um número infinito de X_n's toma valores menores que 1.

4. Construa exemplos (diferentes dos dados na aula) que mostram que:
(a) convergência em probabilidade não implica na convergência quase certa;
(b) convergência em L^p não implica na convergência quase certa;
(c) convergência quase certa não implica na convergência em L^p.

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. Uniformes $(0,1)$ e sejam $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $U_n = nY_n$. Mostre que, quando $n \to \infty$,
(a) $Y_n \to 0$, $Z_n \to 1$ em probabilidade;
(b) $U_n \to \mathrm{Exp}(1)$ em distribuição.

6. Ache o limite (quase certo) da sequência $Y_1, Y_2, \ldots$ onde

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1^\alpha + \ldots + X_n^\alpha),$$

$X_1, X_2, \ldots$ são i.i.d. Uniformes $(0,1)$ e $\alpha > 0$.

7. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. com $\mathbb{E}X_i = \operatorname{Var} X_i = 1$. Mostre que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_i^2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

quase certamente.

8. As v.a. $X_1, X_2, \ldots$ são independentes, $\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$. Mostre que

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n^2} \to 0 \text{ em probabilidade.}$$

9. A cada aposta, o jogador perde 1 R$ com probabilidade 0.7, perde 2 R$ com probabilidade 0.2 ou ganhe 10 R$ com probabilidade 0.1. Calcule (aproximadamente) a probabilidade de que este jogador estará perdendo depois de 100 apostas (ganho negativo).

10. O número dos dias que uma certa componente funciona até falhar é uma v.a. com densidade $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$. A componente que falha é reposta imediatamente. Quantas componentes precisamos ter no estoque para que a probabilidade de que o estoque vai durar pelo menos 35 dias seja 0.95?

11. Os engenheiros civis acreditam que o peso (em toneladas) que uma certa ponte pode suportar sem sofrer danos estruturais tem distribuição Normal com média 200 e desvio padrão 20. Suponha que o peso de um carro é uma v.a. (não necessariamente Normal) com média 1 e desvio padrão 0.2. Quantos carros podem passar simultaneamente por esta ponte sem que a probabilidade de danos estruturais exceda 0.01?

13. As notas dos alunos do curso de estatística tem média 7.4 e desvio padrão 1.4 (suponha que as notas são v.a. independentes). O professor vai dar duas provas, uma para turma de 25 alunos, e outra para uma turma de 64 alunos. Calcule (aproximadamente):
(a) a probabilidade de que a nota média da turma seja pelo menos 8.0 (para as duas turmas);
(b) a probabilidade de que a nota média da turma maior exceda a nota média da turma menor em pelo menos 0.22.

14. Um dado honesto é lançado até que a soma dos resultados exceda 300. Qual é a probabilidade de que serão necessários pelo menos 80 lançamentos?

15. Um dado honesto é lançado 43 vezes. Calcule a probabilidade aproximada que a média geométrica dos resultados é pelo menos 2,33.
Obs.: a média geométrica de $a_1, \ldots, a_n$ é $(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$.

16. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. com $\mathbb{E}X_1 = 0$ e $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$. Ache o limite em distribuição da sequência $Y_1, Y_2, \ldots$, onde

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}.$$