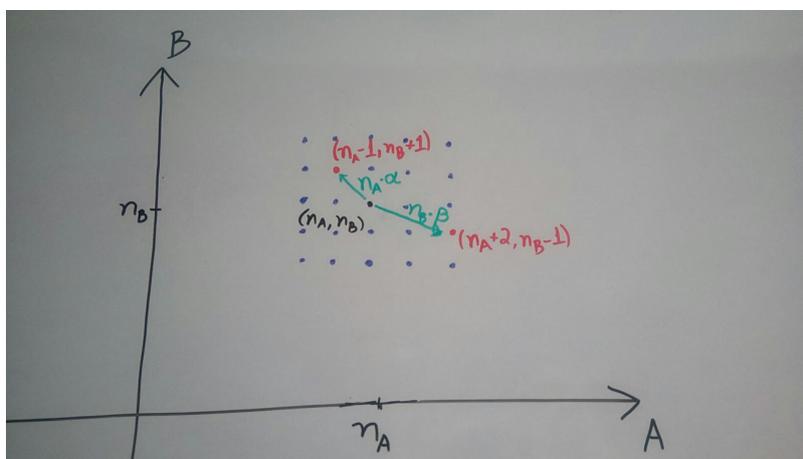


Lista 4 - Gabarito

1)  $X(t)$  definido através de  $v_i, P_{ij} \forall i, j$  é uma CM a tempo contínuo?  
 Precisamos:  $P(X(t) = j | X(s) = i, X(u) = X_u, 0 \leq u < s) = P(X(t) = j | X(s) = i)$   
 tempo no  $i \sim \exp(v_i) \Rightarrow$  falta de memória e quando sai de  $i$  vai  $\forall l$  com probabilidade  $P_{il}$  não dependendo do passado.

2) Vamos considerar que o estado do processo é  $(n_A; n_B)$ , onde  $n_A$  é o número de amebas no estado A,  $n_B$  é o número de amebas no estado B.  
 Temos o gráfico com as taxas de transição em duas dimensões:



$A \rightarrow B$

$$P_{(n_A; n_B), (n_A-1; n_B+1)} = \frac{n_A}{n_A + n_B} \quad \text{☺}$$

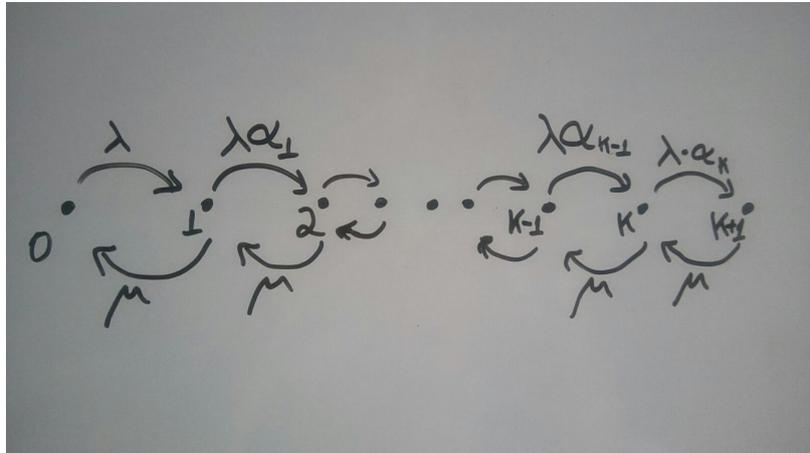
Ou seja, essa é a transição de uma ameba A para uma ameba B.  
 Por outro lado,

$B \rightarrow 2A$

$$P_{(n_A; n_B), (n_A+2; n_B-1)} = \frac{n_B}{n_A + n_B} \quad \text{☺}$$

Ou seja, essa é a transição de uma ameba B para duas amebas A.

3) Podemos observar as taxas no grafo:



Essas taxas são devido a:

O cliente não fica na fila com certeza. Ele entra com probabilidade  $\alpha_n$ , dependendo do tamanho da fila. Então:

$$\lambda_n = \lambda \alpha_n$$

A taxa de serviço permanece constante:

$$\mu_n = \mu$$

Assim,

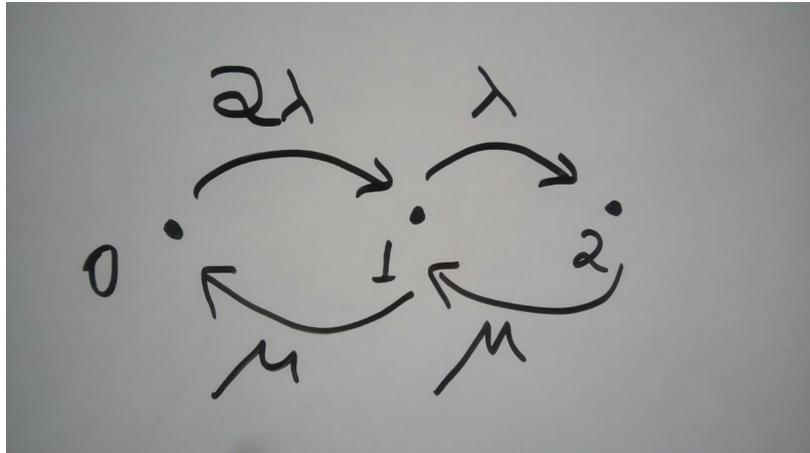
$$v_0 = \lambda; v_i = \lambda \alpha_i + \mu$$

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda \alpha_i}{\lambda \alpha_i + \mu}, i \geq 1$$

$$P_{0,1} = 1$$

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda \alpha_i + \mu}, i \geq 1$$

4) O processo pode ser descrito como um nascimento-morte com os seguintes parâmetros:



$$\mu_n = \mu$$

$$\lambda_n = (2 - n)\lambda, \text{ se } n \in \{0, 1\}$$

$$\lambda_n = 0 \text{ se } n \notin \{0, 1\}$$

Dizemos que o processo está no estado  $n$  quando temos  $n$  máquinas fora de uso.

Eq. de Kolmogorov para trás pode ser definida por  $P'_t = QP_t$ :

$$P'_{0j}(t) = 2\lambda P_{1j}(t) - 2\lambda P_{0j}(t)$$

$$P'_{1j}(t) = \lambda P_{2j}(t) - (\lambda + \mu)P_{1j}(t)$$

$$P'_{2j}(t) = \mu P_{1j}(t) - \mu P_{2j}(t)$$

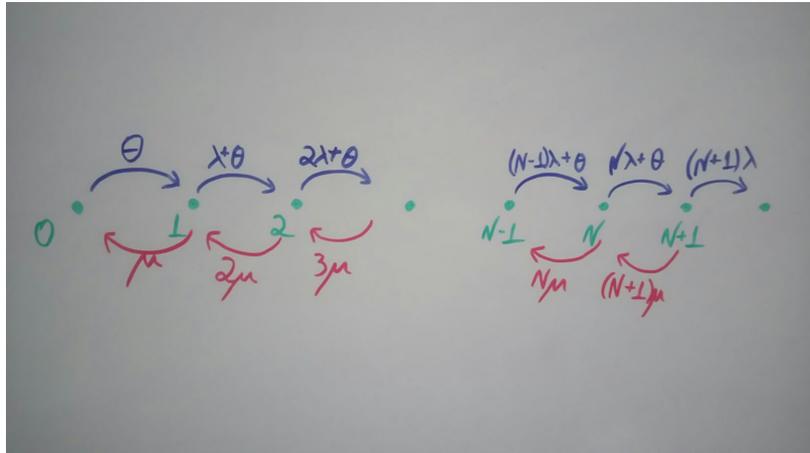
Eq. de Kolmogorov para frente pode ser definida por  $P'_t = P_t Q$ :

$$P'_{i0}(t) = \mu P_{i1}(t) - 2\lambda P_{i0}(t)$$

$$P'_{i1}(t) = 2\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i2}(t) - (\lambda + \mu)P_{i1}(t)$$

$$P'_{i2}(t) = \lambda P_{i1}(t) - \mu P_{i2}(t)$$

5) Seja  $X(t)$  = tamanho da população no tempo  $t$ .



$$\lambda_n = n\lambda + \theta, \text{ para } n = 0, 1, \dots, N \quad \lambda_n = n\lambda, \text{ para } n > N$$

$$\mu_n = n\mu$$

6) Queremos o tempo esperado para o processo ir do estado 2 ao estado 5.

$$\lambda_i = (i + 1)\lambda \quad \mu_i = i\mu$$

$$E(\text{tempo para ir de 2 a 5}) = E(T_2) + E(T_3) + E(T_4)$$

$$E(T_0) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(T_1) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda + \mu}{2\lambda^2}$$

$$E(T_2) = \frac{2!(\lambda^2 + \mu(\lambda + \mu))}{3!\lambda^3}, \quad E(T_3) = \frac{3!(\lambda^3 + \mu(\lambda^2 + \mu(\lambda + \mu)))}{4!\lambda^4}$$

$$E(T_4) = \frac{4!(\lambda^4 + \mu(\lambda^3 + \mu(\lambda^2 + \mu(\lambda + \mu))))}{5!\lambda^5}$$

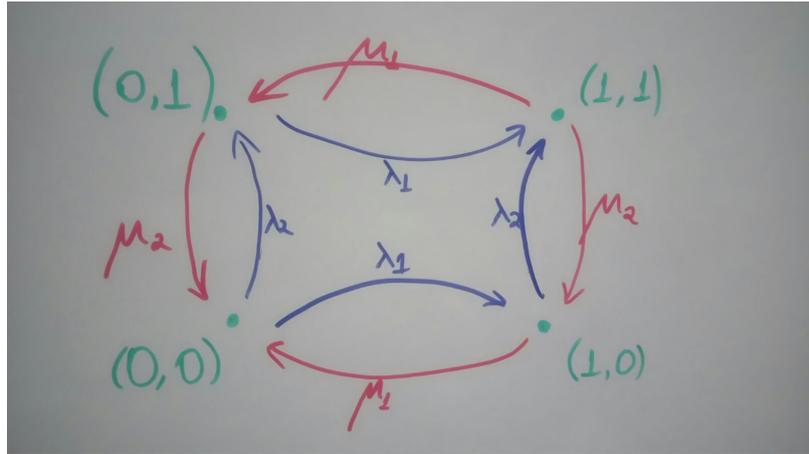
7) Vamos considerar esse processo uma cadeia de Markov com os seguintes estados: (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1), em que (0,1) indica que o primeiro aparelho ████ funciona e o segundo aparelho ████.

Como os aparelhos são independentes, podemos considerar que:

$$P_{(i,j),(n,m)}(t) = P_{(i,n)}^1(t)P_{(j,m)}^2(t)$$

em que  $P_i$  é a probabilidade de transição do aparelho  $i$ , sendo  $i = 1, 2$ .

Ilustramos, a seguir, os 4 estados dessa cadeia de Markov e suas respectivas taxas de transição:



As probabilidades de transição são as seguintes, para  $i = 1, 2$ :

$$P_{00}^i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} P_{01}^i(t) \quad P_{01}^i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}$$

$$P_{10}^i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} - \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} \quad P_{11}^i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}$$

Vamos demonstrar para a equação de Kolmogorov para trás, dada pela seguinte fórmula:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

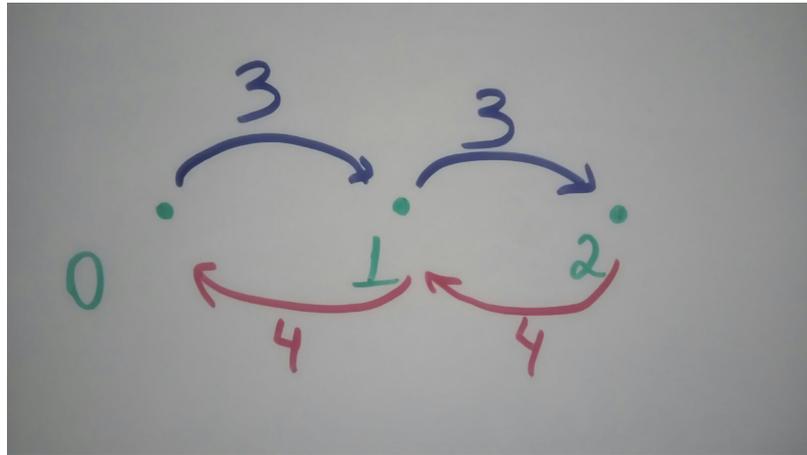
onde  $q_{ik}$  é a taxa de transição de  $i$  para  $k$  e  $v_i$  a taxa total de saída de  $i$ . Daí, vamos calcular para  $P'_{(0,0),(0,1)}(t)$  e demonstrar que satisfaz a equação de Kolmogorov para trás. Os outros estados e a equação de Kolmogorov para frente são análogos.

Neste caso,  $i = (0, 0), j = (0, 1)$ .  $(1, 1)$  não é acessível de  $(0, 0)$

$$\begin{aligned}
 P'_{(0,0),(0,1)}(t) &= \lambda_2 P_{(0,1),(0,1)}(t) + \lambda_1 P_{(1,0),(0,1)}(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) P_{(0,0),(0,1)}(t) \\
 &= \lambda_2 P_{(0,0)}^1(t) P_{(1,1)}^2(t) + \lambda_1 P_{(1,0)}^1(t) P_{(0,1)}^2(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) P_{(0,0)}^1(t) P_{(0,1)}^2(t) \\
 &= \lambda_1 (P_{10}^1 P_{01}^2 - P_{00}^1 P_{01}^2) + \lambda (P_{00}^1 P_{11}^2 - P_{00}^1 P_{01}^2) \\
 &= P_{01}^2 \lambda_1 (P_{10}^1 - P_{00}^1) + P_{00}^1 \lambda (P_{11}^2 - P_{01}^2) \\
 &= P_{01}^2 P_{00}^1 + P_{00}^1 P_{01}^2
 \end{aligned}$$

Substituindo as probabilidades de transição, dadas acima, nas equações acima, partindo da primeira linha deveremos chegar na regra do produto da derivada da última linha e assim demonstramos que satisfaz a equação de Kolmogorov.

8) Temos os estados 0, 1 e 2 que são a quantidade de clientes dentro do salão



$$q_{i,i+1} = 3, \quad i = 0, 1$$

$$q_{i,i-1} = 4, \quad i = 1, 2$$

$$v_0 = 3, \quad v_1 = 7, \quad v_2 = 4$$

$$P_{0,1} = 1, \quad P_{1,0} = \frac{4}{7}, \quad P_{1,2} = \frac{3}{7}, \quad P_{2,1} = 1$$

Com as equações de balanço:

$$\begin{aligned}
 3P_0 &= 7P_1 \frac{4}{7} \\
 7P_1 &= 3P_0 + 4P_2 \\
 4P_2 &= 7P_1 \frac{3}{7} \\
 P_0 + P_1 + P_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Temos que:  
 $P_0 = \frac{16}{37}$ ,  $P_1 = \frac{12}{37}$ ,  $P_2 = \frac{9}{37}$

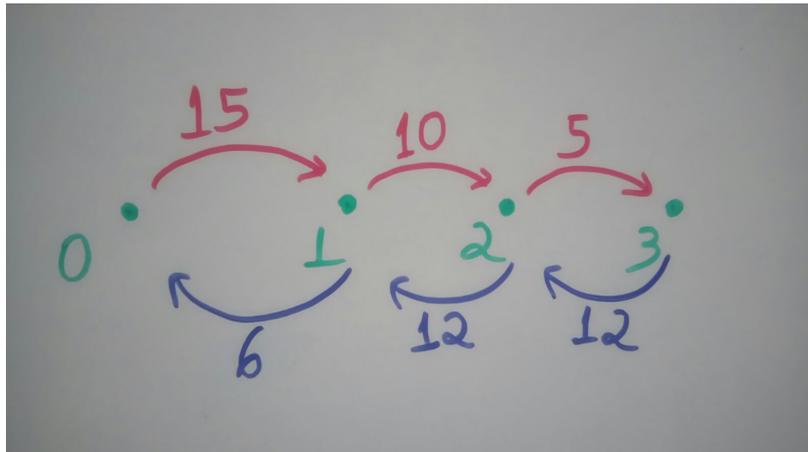
$$L = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = 1P_1 + 2P_2 = \frac{30}{37}$$

a) Número médio de clientes é  $L = \frac{30}{37}$

b) A proporção de clientes que entram no salão é  $1 - P_2$  já que  $P_2$  é a única situação em que os clientes não entram. Então:

$$1 - \frac{9}{37} = \frac{28}{37}$$

9) Como as máquinas quebram e são consertadas independentemente, os estados são: 0, 1, 2 ou 3 máquinas quebradas. E temos as taxas:



$q_{01} = 15$  (3 máquinas para quebrar)  
 $q_{10} = 6$  (1 máquina sendo consertada)  
 $q_{12} = 10$  (2 máquinas para quebrar)  
 $q_{21} = 12$  (2 máquinas sendo consertadas)  
 $q_{23} = 5$  (1 máquina para quebrar)  
 $q_{32} = 12$  (2 máquinas sendo consertadas)  
 $q_{ij} = 0$ , outros casos

Resolvendo as equações de balanço, temos:

$$P_0 = \frac{864}{5574}, P_1 = \frac{2160}{5574}, P_2 = \frac{1800}{5574}, P_3 = \frac{750}{5574},$$

a) Número médio de máquinas quebradas é:

$$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{8010}{5574} \cong 1.43$$

b) Com a mudança nas taxas, temos:

$q_{i,i-1} = 12$ ,  $i = 1, 2, 3$ , os outros casos continuam iguais.

Resolvendo as equações de balanço, agora temos:

$$P_0 = \frac{1728}{6438}, P_1 = \frac{2160}{6438}, P_2 = \frac{1800}{6438}, P_3 = \frac{750}{6438},$$

Número médio de máquinas quebradas é:

$$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{3750}{6438} \cong 1.24$$

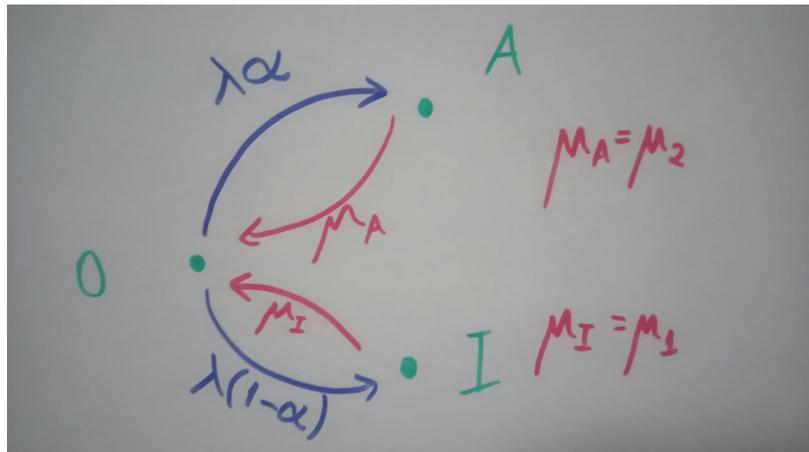
10) Estados:

0 - Lugar Vazio

A - espaço ocupado por molécula aceitável

I - espaço ocupado por molécula inaceitável

Queremos  $P_A$  e  $P_I$



Equações de balanço:

$$\lambda P_0 = \mu_A P_A + \mu_I P_I$$

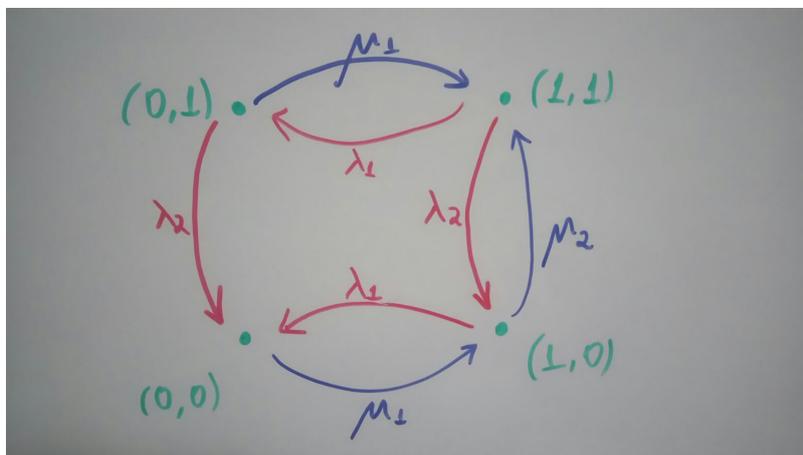
$$\begin{aligned}\mu_A P_A &= \lambda \alpha P_0 \\ \mu_I P_I &= \lambda(1 - \alpha)P_0 \\ P_0 + P_I + P_A &= 1\end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda \alpha}{\mu_A} + \frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}}, \quad P_A = \frac{\lambda \alpha}{\mu_A} \frac{1}{1 + \frac{\lambda \alpha}{\mu_A} + \frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}}, \quad P_I = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I} \frac{1}{1 + \frac{\lambda \alpha}{\mu_A} + \frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}}$$

- 11) Temos os estados:  
 (0,0) Ambas maquinas quebradas  
 (1,0) Maquina 1 funcionando e maquina 2 quebrada  
 (0,1) Maquina 2 funcionando e maquina 1 quebrada  
 (1,1) Ambas funcionando

Diante disso temos as taxas:

$$\begin{aligned}q(0,0)(1,0) &= \mu_1 \\ q(0,1)(0,0) &= \lambda_2 \\ q(0,1)(1,1) &= \mu_1 \\ q(1,0)(0,0) &= \lambda_1 \\ q(1,0)(1,1) &= \mu_2 \\ q(1,1)(0,1) &= \lambda_1 \\ q(1,1)(1,0) &= \lambda_2\end{aligned}$$



E ainda,

$$\begin{aligned}v(0,0) &= \mu_1 \\ v(0,1) &= \lambda_2 + \mu_1 \\ v(1,0) &= \lambda_1 + \mu_2 \\ v(1,1) &= \lambda_1 + \lambda_2\end{aligned}$$

Temos o sistema:

$$\mu_1 P(0,0) = \lambda_2 P(0,1) + \lambda_1 P(1,0)$$

$$(\lambda_2 + \mu_1) P(0,1) = \lambda_1 P(1,1)$$

$$(\lambda_1 + \mu_2) P(1,0) = \mu_1 P(0,0) + \lambda_2 P(1,1)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) P(1,1) = \mu_1 P(0,1) + \mu_2 P(1,0)$$

$$P(0,0) + P(1,0) + P(0,1) + P(1,1) = 1$$

A proporção de tempo que a máquina 2 está quebrada é dada por  $P(0,0) + P(1,0)$

12) Temos os estados :

R - Rio

SP - Sao Paulo

Sal - Salvador

Como no enunciado fala sobre as médias, e sabemos que:  $q_{i,j} = v_i P_{i,j}$

Logo, temos as taxas:

$$q_{Sal,SP} = \frac{1}{3}$$

$$q_{R,Sal} = \frac{3}{8}$$

$$q_{R,SP} = \frac{1}{8}$$

$$q_{SP,Sal} = \frac{1}{4}$$

$$q_{SP,R} = \frac{1}{4}$$

$$v_R = \frac{1}{2}$$

$$v_{Sal} = \frac{1}{3}$$

$$v_{SP} = \frac{1}{2}$$

Temos portanto o sistema:

$$\frac{1}{3} P_{Sal} = \frac{3}{8} P_R + \frac{1}{4} P_{SP}$$

$$\frac{1}{2} P_R = \frac{1}{4} P_{SP}$$

$$\frac{1}{2} P_{SP} = \frac{1}{3} P_{Sal} + \frac{1}{8} P_R$$

$$P_{Sal} + P_R + P_{SP} = 1$$

Resolvendo-o obtemos:

$$P_{Sal} = \frac{21}{45}$$

$$P_R = \frac{8}{45}$$

$$P_{SP} = \frac{16}{45}$$

Que representam as proporções de tempo em Salvador, Rio e São Paulo respectivamente.

Para saber quantas viagens de São Paulo para o Rio são feitas, fazemos:

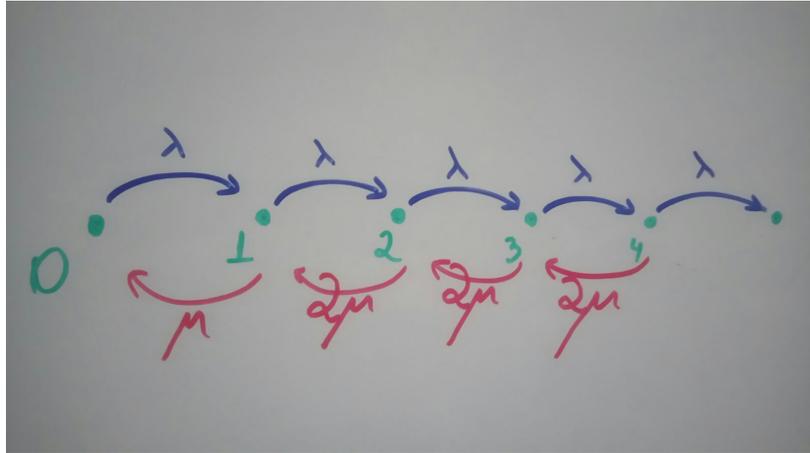
$$P_{SP,R} P_{SP} = \frac{1}{2} \frac{16}{45} = \frac{16}{90}$$

Isso representa o número médio de viagens por semana. Multiplicamos por 52 para obter o número médio por ano:

$$\frac{16}{90} 52 = 9.244$$

Número médio de viagens de São Paulo para o Rio por ano é 9.244.

13) Consideramos como estados o número de clientes no sistema. Desse modo temos:



$$v_0 = \lambda$$

$$v_1 = \lambda + \mu$$

$$v_i = \lambda + 2\mu \text{ para } i \geq 2$$

e ainda:

$$P_{0,1} = 1$$

$$P_{1,0} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$P_{1,2} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \text{ E a partir daí:}$$

$$P_{i,i-1} = \frac{2\mu}{2\mu + \lambda}$$

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}$$

Com isso montamos o sistema a partir da equação:  $v_j P_j = \sum_k v_k P_{k,j} P_k$

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\mu + \lambda) P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

$$(2\mu + \lambda) P_i = \lambda P_{i-1} + 2\mu P_{i+1} \text{ para } i \geq 2$$

$$\sum_i P_i = 1$$

Resolvendo:

$$P_0 = P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} P_0 \text{ generalizando:}$$

$$P_i = \frac{\lambda^i}{\mu^i} \frac{1}{2^{i-1}} P_0$$

a-) Sabemos que  $\sum_i P_i = 1$

$$\text{Logo } P_0 = 1 - \sum_{i=1} P_i$$

Fica claro que  $\sum_{i=1} P_i$  é uma PG com  $q = \frac{\lambda}{2\mu}$ . Portanto  $\sum_{i=1} P_i = \frac{P_1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{2\lambda P_0}{2\mu - \lambda}$

$$\text{Logo } P_0 = 1 - \frac{2\lambda P_0}{2\mu - \lambda}$$

$$P_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu - \lambda}$$

Tendo  $P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{1}{2^{n-1}} P_0$  fica evidente que:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{2\mu - \lambda}{2\mu - \lambda}$$

b-) Para resolver esse Problema deveremos resolver a equação:

$$P_a = 1 - P_0 - P_v$$

Sendo  $P_v$  a probabilidade de um cliente ser atendido pelo vendedor principal e  $P_a$  a probabilidade de um cliente ser atendido pelo auxiliar.

Sabemos que  $P_1 = P_a + P_v$

Consideramos os estados :

- 0 – Nenhum cliente na loja
- a – apenas atendente a ocupado
- v – apenas atendente v ocupado
- 2 – 2 pessoas na loja

Temos:

$$v_0 = \lambda$$

$$v_a = \lambda + \mu$$

$$v_v = \lambda + \mu$$

$$v_2 = 2\mu$$

$$q(0,v) = \lambda$$

$$q(v,0) = \mu$$

$$q(v,2) = \lambda$$

$$q(a,0) = \mu$$

$$q(a,2) = \lambda$$

$$q(2,v) = \mu$$

$$q(2,a) = \mu$$

Formulamos o sistema:

$$(\lambda + \mu)P_a = \mu P_2$$

$$(\lambda + \mu)P_v = \lambda P_v + \mu P_2$$

$$P_a + P_v = P_1 \text{ (sendo } P_1 \text{ a probabilidade de ter uma pessoa na loja).}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$P_v = \frac{\lambda P_0 (\frac{\lambda}{2} + \mu)}{\mu(\lambda + \mu)}$$

E resolvendo  $P_{(ajudantetrabalha)} = 1 - P_0 - P_v$

Temos  $P_{(ajudantetrabalha)} = \frac{\mu(\mu+\lambda) - P_0\mu(\mu+\lambda) - P_0\lambda(\frac{\lambda}{2})}{\mu(\mu+\lambda)}$  que é a proporção desejada.

$$c) L = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \frac{4\frac{\lambda}{\mu}}{(\frac{\lambda}{\mu}-2)^2}$$

$$d) \frac{L}{\lambda_a} = \frac{4}{\mu(\frac{\lambda}{\mu}-2)^2}$$

14) Como todas as taxas são as mesmas, independe do servidor que o cliente é atendido, única coisa que importa é a quantidade máxima de clientes.

Temos os estados:

0 - Nenhum cliente

1 - 1 cliente

2 - 2 clientes

E as taxas:

$$q_{i,i+1} = 1 \text{ para } i = 0, 1$$

$$q_{1,0} = 2$$

$$q_{2,1} = 4$$

Usamos o sistema:

$$P_0 = 2P_1$$

$$P_1 = 4P_2$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

E obtemos:

$$P_0 = 1/13 \quad P_1 = 4/13 \quad P_2 = 8/13$$

A proporção de clientes que entram no sistema é  $1 - P_2 = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$

15) Para verificar se a cadeia é reversível, checamos se existe um conjunto de valores que satisfaz:

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \text{ e } \sum_i P_i = 1$$

Calculamos tudo em função de  $P_2$ :

$$P_2 = P_2$$

Para  $P_a$ :

$$\lambda P_a = \mu_b P_2 \text{ logo:}$$

$$P_a = \frac{\mu_b}{\lambda} P_2$$

Para  $P_b$ , analogamente:  $P_b = \frac{\mu_a}{\lambda} P_2$

Para  $P_0$ :

$$\frac{\lambda}{2} P_0 = \mu_a P_a \text{ e}$$

$$\frac{\lambda}{2}P_0 = \mu_b P_b$$

$$\text{logo: } P_0 = \frac{2\mu_a\mu_b}{\lambda}P_2$$

Para  $P_3$ :

$$(\mu_a + \mu_b)P_3 = \lambda P_2$$

$$\text{logo: } P_3 = \frac{\lambda}{(\mu_a + \mu_b)}P_2$$

Para  $P_4$ :

$$(\mu_a + \mu_b)P_4 = P_3$$

$$\text{logo: } P_4 = \frac{\lambda}{\mu_a + \mu_b}P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu_a + \mu_b}\right)^2 P_2$$

Verificamos que para  $n \geq 2$ :

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu_a + \mu_b}\right)^{n-2} P_2$$

Resta verificar que  $\sum_i P_i = 1$

$$\text{Verificando: } \sum_i P_i = P_2 \left( \frac{2\mu_a\mu_b}{\lambda} + \frac{\mu_a}{\lambda} + \frac{\mu_b}{\lambda} + \sum_{i=2} \left(\frac{\lambda}{\mu_a + \mu_b}\right)^{n-2} \right)$$

$$\text{Sabemos que } \sum_{i=2} \left(\frac{\lambda}{\mu_a + \mu_b}\right)^{n-2} = \frac{\mu_a + \mu_b}{\mu_a + \mu_b - \lambda}$$

Dessa forma descobrimos que a soma converge para  $\lambda < \mu_a + \mu_b$

E descobrimos que a distribuição estacionária é dada por:

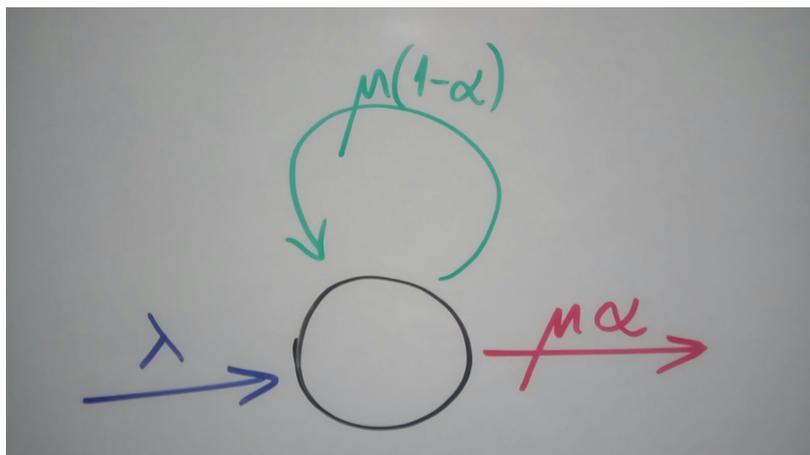
$$P_0 = \frac{2\mu_a\mu_b}{\lambda}P_2, P_a = \frac{\mu_b}{\lambda}P_2, P_b = \frac{\mu_a}{\lambda}P_2$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu_a + \mu_b}\right)^{n-2}P_2, \text{ para } n \geq 2$$

16) a)  $P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\mu\alpha + \lambda}$

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha + \lambda}$$

$v_0 = \lambda$  e  $v_1 = \lambda + \mu\alpha$



Escrevemos o sistema:

$$\lambda P_0 = \mu\alpha P_1$$

$$(\mu\alpha + \lambda)P_1 = \lambda P_0 + \mu\alpha P_2$$

$$(\mu\alpha + \lambda)P_2 = \lambda P_0 + \mu\alpha P_3$$

...

$$(\mu\alpha + \lambda)P_i = \lambda P_{i-1} + \mu\alpha P_{i+1}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu\alpha}$$

A solução existe para  $\lambda < \mu\alpha$

b) Tempo médio de espera de um cliente ser atendido pela primeira vez =  $W_Q$  = tempo médio de espera na fila

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu\alpha - \lambda)}$$

c) Para o cliente ser servido  $n$  vezes ele deve entrar, ser servido e depois voltar ao final da fila  $(n - 1)$  vezes com probabilidade  $(1 - \alpha)$ , assim:

$$P(\text{ser servido } n \text{ vezes}) = (1 - \alpha)^{n-1} \alpha$$

d) Sabemos pela letra c) que  $P(\text{ser servido } n \text{ vezes}) = (1 - \alpha)^{n-1} \alpha$  é uma geométrica com média  $\frac{1}{\alpha}$  e o tempo de serviço tem média  $\frac{1}{\mu}$

Dessa forma tempo médio que o cliente passa no servidor é dado por:  $\frac{1}{\mu\alpha}$

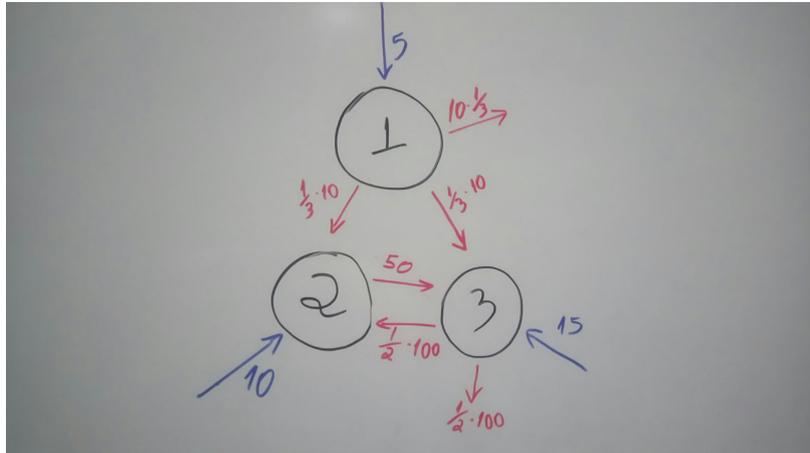
e) Se temos  $n$  clientes, o cliente chegou então temos  $(n+1)$

O tempo de serviço é  $\exp(\mu)$ , independente.

Dessa forma o tempo total é igual a soma de  $(n+1)$   $\exp(\mu)$  independentes.

Isso é igual a  $\text{gamma}(n + 1, \mu)$

17) De acordo com o enunciado, temos que:



$$r_1 = 5, r_2 = 10, r_3 = 15$$

$$\mu_1 = 10, \mu_2 = 50, \mu_3 = 100$$

Número médio de clientes no sistema  $L = \sum_{j=1}^a \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}$

$$\sum_{j=1}^3 P_{ij} \leq 1$$

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^a \lambda_i P_{ij}$$

Onde  $P_{ij}$  é a probabilidade de sair do servidor  $i$  e ir para o servidor  $j$ , temos:

$P_{12} = 1/3, P_{13} = 1/3, P_{23} = 1, P_{32} = 1/2$ , o restante é 0.

Escrevendo o sistema:

$$\lambda_1 = r_1 + \lambda_1 P_{11} + \lambda_2 P_{21} + \lambda_3 P_{31}$$

$$\lambda_2 = r_2 + \lambda_1 P_{12} + \lambda_2 P_{22} + \lambda_3 P_{32}$$

$$\lambda_3 = r_3 + \lambda_1 P_{13} + \lambda_2 P_{23} + \lambda_3 P_{33}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 40, \lambda_3 = \frac{170}{3}$$

$$L = \frac{95}{13}$$

Tempo médio que um cliente passa no sistema:

$$W = \frac{L}{\sum_j \lambda_j} = \frac{19}{78}$$