ME501: Lista 4

1. Mostre que o processo $(X_t)_{t\geq 0}$ definido através das taxas v_i e probabilidades de transição da cadeia de Markov imersa (saindo de i, vai para j com probabilidade P_{ij} , $P_{ii} = 0$, $\sum_j P_{ij} = 1$) é uma cadeia de Markov em tempo contínuo.

2. Suponha que uma ameba pode estar em dois estados, A ou B. Quando a ameba está no estado A, vai passar para o estado B depois de um tempo exponencial com taxa α. Quando a ameba está no estado B, depois de um tempo exponencial com taxa β vai se dividir em duas do tipo A. Defina uma cadeia de Markov apropriada para uma população destas amebas. Quais são os parâmetros?

3. Os clientes chegam a uma estação de serviços com um único servidor de acordo com um processo de Poisson com parâmetro λ. O cliente que chega e vê que já há outros n clientes na estação desiste e vai embora com probabilidade $1 - \alpha_n$, e entra na fila com probabilidade α_n. O tempo de serviço é exponencial com parâmetro μ. Descreva este modelo como um processo de nascimento e morte e dê as respetivas taxas.

4. Consideramos dois aparelhos, o tempo de vida de cada um deles é exponencial com parâmetro λ. Os aparelhos são independentes um do outro. Quando um aparelho quebra, o mecânico faz o reparo, que demora um tempo exponencial com parâmetro μ (tem apenas um mecânico para cuidar destes dois aparelhos). Descreva este processo como um processo de nascimento e morte. Escreva para ele as equações de Kolmogorov para trás e para frente (não é necessário resolver as equações).

5.. Numa população cada indivíduo gera um filho com taxa λ e morre com taxa μ independentemente dos outros. Além disso, os indivíduos de fora estão imigrando para esta população com taxa θ, mas a imigração somente é permitida enquanto o tamanho da população não ultrapassa N. Descreva este modelo como um processo de nascimento e morte e dê as respetivas taxas.

6.. Considere um processo de nascimento e morte com taxas $\lambda_i = (i+1)\lambda$, $i \geq 0$, e $\mu_i = i\mu$, $i \geq 1$. Calcule o tempo esperado para o processo ir de estado 2 ao estado 5.

7. Consideramos dois aparelhos. O aparelho i funciona um tempo exponencial com parâmetro λ_i, depois quebra e o tempo para repara-lo é exponencial com parâmetro μ_i, $i = 1, 2$. Os aparelhos são independentes um do outro. Defina uma cadeia de Markov com tempo contínuo com 4 estados que descreve o funcionamento deste sistema. Calcule as probabilidades de transição $P_{ij}(t)$ desta cadeia de Markov utilizando a independência dos aparelhos e verifique se estas probabilidades satisfazem as equações de Kolmogorov para frente e para trás.

8. Um cabeleireiro trabalha sozinho num salão pequeno, onde só cabem dois clientes (um que está sendo servido e outro esperando). Os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa 3. Os tempos de serviço são independentes e tem distribuição exponencial com parâmetro 4. Calcule (a) o número médio dos clientes no salão; (b) a proporção dos clientes que conseguem entrar no salão.

9. Numa fábrica tem 3 máquinas e dois mecânicos para cuidar delas. Cada máquina funciona um tempo exponencial com parâmetro 5 e depois quebra independentemente das outras. Cada mecânico leva um tempo exponencial com parâmetro 6 para consertar uma máquina.
(a) Calcule o número médio das máquinas quebradas.
(b) Calcule o número médio das máquinas quebradas se em vez de 2 mecânicos tem apenas 1, mas que trabalha duas vezes mais rápido.

10. O seguinte problema surge na biologia. A superfície de uma bactéria tem alguns lugares onde uma (só uma) molécula (aceitável ou não) pode se fixar. As moléculas se aproximam de um destes lugares de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Entre estes moléculas a proporção de aceitáveis é α. As moléculas inaceitáveis permanecem junto a bactéria um tempo exponencial com parâmetro μ_1 e as aceitáveis um tempo exponencial com parâmetro μ_2. Qual é a proporção de tempo que o lugar está ocupado por uma molécula aceitável (inaceitável)?