ME501: Prova 1 — 01 de outubro de 2019

Todas as respostas devem ser justificadas!

Exercício 1: (2pts) Uma fábrica tem 3 máquinas. Em qualquer dia, cada máquina em funcionamento quebra com probabilidade 1/5, independentemente das demais. Ao final de cada dia, as máquinas que quebraram são enviadas para um mecânico, que pode trabalhar em apenas uma máquina por vez. Quando o mecânico tem uma ou mais máquinas para consertar ao início de um dia, ele conserta somente uma máquina e a devolve ao final desse dia. Seja X_n o número de máquinas em funcionamento ao final do dia n (e início do dia $n+1$), depois que as quebras e os reparos daquele dia são incluídos.
1) Explique por que $(X_n)_n$ é uma cadeia de Markov e escreva a sua matriz de probabilidades de transição.
2) Classifique os estados da cadeia $(X_n)_n$.

Exercício 2: (3pts) Uma urna contém sempre N bolas, algumas das quais são pretas, as outras brancas. A cada estágio, uma moeda com probabilidade p de cara é lançada ($0 < p < 1$). Se ocorre cara, então uma bola é selecionada ao acaso da urna e substituída por uma bola branca; se ocorre coroa, então uma bola é selecionada ao acaso da urna e substituída por uma bola preta. Seja X_n o número de bolas brancas na urna após o n-ésimo estágio.
1) Obtenha as probabilidades de transição P_{ij} da cadeia de Markov $(X_n)_n$.
2) Mostre que $(X_n)_n$ é irredutível e aperiódica.
3) Prove que $(X_n)_n$ é reversível, com distribuição estacionária $\text{Bin}(N, p)$.

Exercício 3: (3pts) Clientes chegam em um banco de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 10$ clientes por hora. Suponha que dois clientes cheguem durante a primeira hora. Qual é a probabilidade que:
1) Ambos tenham chegado durante os primeiros 20 minutos?
2) Pelo menos um tenha chegado durante os primeiros 20 minutos?

Exercício 4: (2pts) Para o processo de ramificação, calcule a probabilidade de extinção, se $P_0 = 1/4$, $P_1 = 1/4$, $P_2 = 1/6$ e $P_3 = 1/3$.