ME-501 Processos estocásticos

Lista 1

1. Prove que, se $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov, então

$$\mathbf{P}[X_n = j \mid X_k = l, X_m = i] = \mathbf{P}[X_n = j \mid X_m = i]$$

para quais quer l, i, j e quaisquer n, k, m tais que $0 \leq k < m < n$.

2. Considere o seguinte modelo: 5 bolinhas são colocadas em 2 urnas (por exemplo, cada bolinha é colocada na urna 1 com probabilidade 1/2, ou na urna 2, com probabilidade 1/2). Depois, em cada momento de tempo, escolhemos com probabilidade 1/2 uma das urnas, tiramos uma bolinha de lá e a colocamos na outra urna (se não houver bolinhas na urna escolhida, nada acontece). Seja X_n a quantidade das bolinhas na urna 1. O processo $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov? Explique. Calcule a matriz de transição.

3. Quais são as classes de seguintes cadeias de Markov:

a)

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{pmatrix};$$

b)

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix};$$

Para cada classe, determine se ela é recorrente ou transiente. Justifique a resposta.

4. A matriz de transição de uma cadeia de Markov é dada por:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

A distribuição inicial é dada pelo vetor (0.7; 0.2; 0.1). Calcule:
(a) a distribuição no momento $t = 2$;

(b) a probabilidade de que nos momentos $t = 0, 1, 2, 3$ esta cadeia estará nos estados $0, 2, 2, 1$ respetivamente;
(c) a distribuição estacionária.

5. Consideramos uma cadeia de Markov com a matriz de transição

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

$0 < p < 1$. Prove que

$$\mathcal{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}.$$

6. Sejam ξ_t, $t = 1, 2 \ldots$ as variáveis aleatórias independentes com $\mathbf{P}[\xi_t = 1] = p$, $\mathbf{P}[\xi_t = -1] = 1 - p$. Sejam $\eta_0 = 0$, $\eta_t = \eta_{t-1} + \xi_t$, $t = 1, 2 \ldots$. A sequência η_t á uma cadeia de Markov? Justifique a resposta. Calcule $\mathbf{P}[\eta_t = m]$, $m = 0, 1, 2 \ldots$

7. Seja $\mathcal{P}$ a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Mostre que se para algum r todos os elementos da matriz $\mathcal{P}^r$ são positivos, então para qualquer $n \geq r$ todos os elementos da $\mathcal{P}^n$ também são positivos.

8. Mostre que se a cadeia de Markov tem M estados e estado j é acessível do estado i, então o processo pode ir de i para j em M passos ou menos (existe $n \leq M$ tal que $p_{ij}^n > 0$).

9. Seja $f_{ij}^n = \mathbf{P}(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, \ldots, n-1 \mid X_0 = i)$. Mostre que

$$p_{ij}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^k p_{jj}^{n-k},$$