ME-501 Processos estocásticos

Lista 2

1. A moeda A tem probabilidade 0.6 de sair cara, e a moeda B tem probabilidade 0.5 de sair cara. Uma moeda é lançada até obter coroa pela primeira vez, e quando isso acontece a moeda é trocada por outra. Qual é a proporção do tempo quando a moeda A é usada? Se começamos com moeda A, qual é a probabilidade de que a moeda B será usada no 3o lançamento?

2. A matriz $\mathcal{P}$ é chamada duplamente estocástica se, além de $\sum_j p_{ij} = 1$, temos $\sum_i p_{ij} = 1$. Mostre que se a matriz de transição de uma cadeia de Markov com M estados é duplamente estocástica, então $\pi_i = 1/M$ para todo i.

3. Pedro tem k guarda-chuvas, que ele mantem em casa e no trabalho. Se estiver chovendo no momento que ele estiver saindo de casa (do trabalho) e houver um gurda-chuva no local, ele pega o guarda-chuva. Se a probabilidade de chuva no momento de saída de casa(trabalho) é p, calcule a proporção do tempo que o Pedro fica molhado (está chovendo e ele não tem guarda-chuva no local).
Dica: se X_n =número de guarda-chuvas no local no instante n, mostre que distrubição estacionária é dada por $\pi_0 = (1-p)/(k+1-p)$ e $\pi_i = 1/(k+1-p)$, $i = 1, \ldots, k$.

4. Considere a cadeia de Markov com estados $0, 1, 2, 3, 4$ e as seguintes probabilidades de transição: $p_{04} = 1$; se o processo está no estado i, $i \neq 0$, então no próximo momento o processo escolhe ao acaso um dos estados $0, \ldots, i-1$. Calcule a distribuição estacionária.

5. Mostre que a distribuição estacionária para cadeia de Markov com probabilidade se transição p_{ij} é também a distribuição estacionária para cadeia de Markov com probabilidade se transição $q_{ij} = p_{ij}^k$ (k fixo).

6. Seja π_i proporção do tempo que a cadeia de Markov passa no estado i ao longo prazo.
(a) Explique porque π_i é também proporção de transições (ao longo prazo) a partir do estado i, e também de transições para estado i.
(b) $\pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições que satisfazem que propriedade?
(c) $\sum_i \pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições que satisfazem que propriedade?
(d) Utilizando itens anteriores explique porque $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$.
(e) Mostre que para qualquer A (subconjunto do espaço dos estados)

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in A^c} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} \pi_i p_{ij}.$$

7. No problema da ruína do jogador, seja M_i o número médio de partidas até que o jogador ou perde tudo, ou ganha capital N, dado que começou com capital i. Prove que $M_i = i(N-i)$, se $p = 1/2$, e

$$M_i = \frac{i}{1-2p} - \frac{N}{1-2p} \frac{1 - ((1-p)/p)^i}{1 - ((1-p)/p)^N},$$

se $p \neq 1/2$.
Dica: Obtenha um sistema de equações para M_i, resolve este sistema no caso $p = 1/2$, e no caso $p \neq 1/2$ pode apenas verificar que a solução proposta satisfaz o sistema.

8. No problema de ruína do jogador, suponha que o jogador tem i R\$ no momento e que sabemos que ele vai chegar ao capital N. Mostre que neste caso a probabilidade (condicional) de ganhar a próxima aposta é

$$\begin{aligned} \frac{p(1-(q/p)^{i+1})}{1-(q/p)^i}, &\quad \text{se} \quad p \neq 1/2, \\ \frac{i+1}{2i}, &\quad \text{se} \quad p = 1/2, \end{aligned}$$

onde $q = 1 - p$.

9. Para o processo de ramificação, calcule π_0, se
(a) $P_0 = 1/4$, $P_2 = 3/4$;
(b) $P_0 = 1/6$, $P_1 = 1/2$, $P_3 = 1/3$.

10. Considere um processo de ramificação com $\mu < 1$. Mostre que o número esperado de individuos que existiram na população (em toda história desta população) é $1/(1-\mu)$.

11. Seja $\{X_n\}$ uma cadeia de Markov reversível. Mostre que a distribuição estacionária da cadeia com tempo invertido é a mesma que da cadeia original.
Dica: sejam Q_{ij} probabilidades de transição da cadeia com tempo invertido e $\{\pi_j\}$ a distribuição estacionária da cadeia original. Mostre que

$$\pi_j = \sum_i \pi_i Q_{ij}.$$

12. Considere o seguinte modelo. Temos m bolinhas brancas e m bolinhas coloridas que são distribuídas entre duas urnas do jeito que cada urna contenha m bolinhas. A cada momento de tempo, escolhemos ao acaso uma bolinha em cada urna e trocamos estas bolinhas entre si. Seja X_n o número de bolinhas brancas na primeira urna depois de n trocas.
(a) Dê as probabilidades de transição desta cadeia de Markov.
(b) Sem fazer a conta, qual você acha que vai ser a distribuição estacionária desta cadeia de Markov?
(c) Mostre que esta cadeia de Markov é reversível e calcule a distribuição estacionária.