

Probabilidade 2 - ME310 - Lista 1

24 de Setembro de 2018

Lembrando:

1. Probabilidade conjunta $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = F(a_1, b_1) + F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1)$
2. Soma de v.a. independentes (por convolução) $f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(a-y) \cdot f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(a-x)dx$
3. Probabilidade conjunta: $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy$
4. Densidade condicional: $f_{X/Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$
5. Densidade marginal: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$
6. V.a. independentes: $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$
7. i.i.d: independentes e identicamente distribuídas (mesma distribuição e cada uma é independente das demais)
8. Esperança: $\mathbf{E}(g(x, y, z)) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} g(x, y, z) \cdot p(x, y, z)$

1) F é a função da distribuição acumulada conjunta das v.a. X e Y . Sabendo $F(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ calcule

a) $P(X > a, Y > b)$

Resp. a)

- $P(\Omega) = 1 = P(\{X > a, Y > b\} \dot{\cup} \{X > a, Y > b\}^c) = P(\{X > a, Y > b\}) + P(\{X > a, Y > b\}^c) = P(X > a, Y > b) + P(X \leq a \cup Y \leq b)$
- $P(X \leq a \cup Y \leq b) = P(X \leq a) + P(Y \leq b) - P(X \leq a, Y \leq b) = F(a, \infty) + F(\infty, b) - F(a, b)$

unindo as duas equações temos que: $P(X > a, Y > b) = 1 - (F(a, \infty) + F(\infty, b) - F(a, b)) = 1 + F(a, b) - F(a, \infty) - F(\infty, b)$

b) $P(a_1 < X < a_2, Y \geq b)$

Resp. b)

vamos enumerar o que sabemos:

- $P(a_1 < X < a_2) = P(X < a_2) - P(X \leq a_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq a_2 - \epsilon) - P(X \leq a_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(a_2 - \epsilon, \infty) - F(a_1, \infty) = F(a_2^-, \infty) - F(a_1, \infty)$.
- $P(a_1 < X < a_2) = P(a_1 < X < a_2, \{Y \geq b \dot{\cup} Y < b\}) = P(a_1 < X < a_2, Y \geq b) + P(a_1 < X < a_2, Y < b)$
- $P(a_1 < X < a_2, Y < b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(X < a_2, Y \leq b - \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq a_1, Y \leq b - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq a_2 - \epsilon, Y \leq b - \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq a_1, Y \leq b - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(a_2 - \epsilon, b - \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(a_1, b - \epsilon) = F(a_2^-, b^-) - F(a_1, b^-)$

Unindo essas informações temos que

$$F(a_2^-, \infty) - F(a_1, \infty) = P(a_1 < X < a_2, Y \geq b) + F(a_2^-, b^-) - F(a_1, b^-) \implies P(a_1 < X < a_2, Y \geq b) = F(a_2^-, \infty) - F(a_1, \infty) - F(a_2^-, b^-) + F(a_1, b^-)$$

Obs.: foi usado a notação de limite só para chamar a atenção nas desigualdades e lembrar que apesar de no caso contínuo não fazer diferença se estamos usando \leq ou $<$, nas variáveis discretas (ou quando procuramos pela melhor aproximação de uma variável normal em uma tabela de distribuição normal) isso pode fazer uma diferença significantel!

Se a pergunta foi ‘tenho mesmo que usar esses limites?’, a resposta é ‘não’, quando estiver trabalhando com variáveis contínuas pode passar direto para o passo final e nem se preocupar com limites.

2) A distribuição conjunta de X e Y é dada por $p(x, y)$, onde:

$$\begin{aligned} p(1, 1) &= 1/9; & p(2, 1) &= 1/3; & p(3, 1) &= 1/9 \\ p(1, 2) &= 1/9; & p(2, 2) &= 0; & p(3, 2) &= 1/18 \\ p(1, 3) &= 0; & p(2, 3) &= 1/6; & p(3, 3) &= 1/9 \end{aligned}$$

a) Calcule as distrib. marginais de X e Y .

Resp. a)

$$\text{Lembre-se que } P(Y = y) = \sum_{x=1}^{x=3} P(X = x, Y = y).$$

- $P(Y = 1) = p(1, 1) + p(2, 1) + p(3, 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
- $P(Y = 2) = p(1, 2) + p(2, 2) + p(3, 2) = \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$
- $P(Y = 3) = p(1, 3) + p(2, 3) + p(3, 3) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$
- $P(X = 1) = p(1, 1) + p(1, 2) + p(1, 3) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{2}{9}$
- $P(X = 2) = p(2, 1) + p(2, 2) + p(2, 3) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 3) = p(3, 1) + p(3, 2) + p(3, 3) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

b) As v.a. X e Y são independentes?

Resp. b)

Para que sejam independentes é necessário que $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ para todos x e y , portanto basta mostrar um par que não obedece esta restrição para provar que as v.a. não são independentes:

Pegue, por exemplo $X = 2$ e $Y = 2$ temos que $P(X = 2, Y = 2) = p(2, 2) = 0$, mas $P(X = 2) = \sum_{y=1}^{y=3} P(X = 2, Y = y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(Y = 2) = \sum_{x=1}^{x=3} P(X = x, Y = 2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$

Como $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \frac{1}{12} = P(X = 2) \cdot P(Y = 2)$, temos que as v.a. X e Y não são independentes

c) Calcule a distrib. condicional de X dado que $Y = 1$.

Resp. c)

$$\text{Pela definição temos: } P(X = x/Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p(x,y)}{P(Y=y)}$$

$$\text{Primeiro vamos calcular } P(Y = 1) = \sum_{x=1}^{x=3} P(X = x, Y = 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{Agora podemos calcular } P(X = x/Y = 1) = \frac{p(x,y)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{1/9}{5/9} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1/3}{5/9} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1/9}{5/9} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } x = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{5} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

3) A densidade conjunta das v.a. X e Y e dada por $f(x, y) =$

$$\begin{cases} c \cdot (x + 2 \cdot y) & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} :$$

*) Verique se X e Y são independentes.

Resp. *)

vamos calcular as marginais:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 c \cdot (x + 2 \cdot y) dy = c \cdot (x \cdot y + y^2)_{y=0}^{y=1} = \begin{cases} c \cdot (x + 1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 c \cdot (x + 2 \cdot y) dx = c \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 2 \cdot y \cdot x \right)_{x=0}^{x=1} = \begin{cases} c \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot y \right) & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Disso, verificamos se } f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + 2 \cdot y) & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \neq$$

$$\begin{cases} c^2 \cdot (x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot y \right) & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = f(x) \cdot f(y)$$

Então concluímos que não são independentes

a) o valor de c

Resp. a)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 c \cdot (x + 2 \cdot y) dx dy = \int_0^1 c \cdot (x + 1) dx = \frac{3}{2} \cdot c \implies c = \frac{2}{3}$$

b) a densidade de X

Resp. b)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{2}{3} \cdot (x + 2 \cdot y) dy = \frac{2}{3} \cdot (x \cdot y + y^2)_{y=0}^{y=1} = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot (x + 1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

c) $P(X < Y)$;

Resp. c)

$$P(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{2}{3} \cdot (x + 2 \cdot y) dx dy = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2 \cdot x \cdot y \right)_{x=0}^{x=y} dy = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \frac{5}{2} \cdot y^2 dy = \frac{5}{3} \cdot \frac{y^3}{3}_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{9}$$

d) $P(X + Y < 1)$

Resp. d)

$$P(X + Y < 1) = P(X < 1 - Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{1-y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{2}{3} \cdot (x + 2 \cdot y) dx dy = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2 \cdot x \cdot y \right)_{x=0}^{x=1-y} dy = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^2}{2} + 2 \cdot (1-y) \cdot y \right) dy = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{(1-y)^3}{6} + y^2 - 2 \cdot \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

Observe que não podemos aplicar a equação 2 pois as v.a. não são independentes.

4) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) =$

$$\begin{cases} c \cdot x \cdot e^{-(x+y)} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de c .

$$\text{Usando a definição temos que } 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} c \cdot x \cdot e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} c \cdot x \cdot e^{-y} \cdot e^{-x} dx dy = c \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} dy \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = c \cdot 1 \cdot \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = c \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1+x}{e^x} \right)_0^{\infty} = c \text{ logo } c = 1$$

(b) Calcule a densidade condicional de Y dado que $X = x$.

Usando a definição $f_{Y/X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ e $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ temos:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-(x+y)} dy = \begin{cases} x e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Portanto para todo } x > 0, f_{Y/X}(y|x) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(c) Verifique se X e Y são independentes.

$$\text{Basta calcular } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-(x+y)} dy = \begin{cases} x \cdot e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $f(x, y) = \begin{cases} x \cdot e^{-x} e^{-y} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = f(x) \cdot f(y)$ temos que X e Y são independentes

5) Sejam X e Y v.a. independentes, $X \sim U(0, 2)$ e $Y \sim U(-1, 3)$. Calcule a densidade de $X + Y$.

$$\text{Lembrando } V \sim U(a, b) \implies f_V(v) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbf{I}_{\{a \leq v \leq b\}} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq v \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e } F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v < a \\ \frac{v-a}{b-a} & \text{se } a \leq v \leq b \\ 1 & \text{se } b > v \end{cases}$$

O objetivo desta questão é atentar para problemas decorrentes de trabalhar com intervalos, ou seja, devemos considerar apenas intervalos válidos. Para isso considere $Z = X + Y$ queremos encontrar $f_Z(z)$.

temos que:

- $f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}}$
- $f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq y \leq 3\}}$

(pessoalmente acho essa representação mais simpática, não ocupa duas linhas do caderno, esse \mathbf{I} só nos diz que fora do intervalo a função vale 0)

Podemos usar diretamente a equação 2:

$$\bullet f_Z = f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(a-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx$$

vamos tentar tirar alguma informação dos intervalos possíveis:

- $-1 \leq a - x \leq 3$
- $0 \leq x \leq 2$
- $-1 \leq a \leq 5$ (soma das variáveis X e Y)

1. se $-1 \leq a \leq 1$ então x estará limitado da seguinte forma: $-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3$ com máximo $2 \geq x \geq -2$ e mínimo $0 \geq x \geq -4$, mas além disso, x está limitado pelo intervalo constante $0 \leq x \leq 2$, unindo essas duas informações para $-1 \leq a \leq 1$ então $0 \leq x \leq a + 1 \implies f_Z(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{1+a} f_Y(a-x) dx = \frac{1}{8} \cdot (1+a)$
2. se $1 \leq a \leq 3$ então x estará limitado em: $-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3$ com máximo $4 \geq x \geq 0$ e mínimo $2 \geq x \geq -2$, porém estes dois intervalos contém integralmente a outra restrição $0 \leq x \leq 2$, como, quem restringe o valor é o menor intervalo de cada lado, para o caso $1 \leq a \leq 3$ temos $0 \leq x \leq 2 \implies f_Z(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 f_Y(a-x) dx = \frac{1}{8} \cdot (2) = \frac{1}{4}$
3. se $3 \leq a \leq 5$, x estará limitado em: $-1 \leq a - x \leq 3 \implies a + 1 \geq x \geq a - 3$ com máximo $5 \geq x \geq 2$ e mínimo $4 \geq x \geq 0$, e como sempre também estará limitado a $0 \leq x \leq 2$, o intervalo que limita superiormente é $2 \geq x$ e o inferior $x \geq a - 3$ logo $a - 3 \leq x \leq 2 \implies f_Z(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_{a-3}^2 f_Y(a-x) dx = \frac{1}{8} \cdot (2 - (a - 3)) = \frac{5-a}{8}$

Com isso temos nossa $f_Z(a) = \begin{cases} \frac{5-a}{8} & \text{se } 3 \leq a < 5 \\ \frac{1+a}{8} & \text{se } -1 \leq a < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq a < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

*) Um jeito mais prático: (método da Talita)

temos que:

- $f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}}$
- $f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq y \leq 3\}}$
- $f_Z = f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(a-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}_{\{-1 \leq a-x \leq 3\}} dx$

disso:

- $-1 \leq a-x \leq 3 \implies a+1 \geq x \geq a-3 \implies a-3 \leq x \leq a+1$
- $0 \leq x \leq 2$
- $-1 \leq a \leq 5$ (soma das variis X e Y)

até aqui é igual, mas a 'diferença' está em achar os intervalos (procurar 'a' que não viole $0 \leq x \leq 2$):

1. se x é limitado por **baixo por** $a-3$: vamos achar o intervalo onde isso vale: $0 \leq a-3 \leq 2 \implies a \in (3, 5)$ e nesse intervalo a integral é $\frac{1}{2} \cdot \int_{a-3}^2 \frac{1}{4} dx = \frac{5-a}{8}$ (x limitado por baixo por $a-3$)
2. se x é limitado por **cima por** $a+1$: $0 \leq a+1 \leq 2 \implies a \in (-1, 1)$ e nesse intervalo ($0 \leq x \leq a+1$) a integral a ser calculada é $\frac{1}{2} \cdot \int_0^{1+a} \frac{1}{4} dx = \frac{1+a}{8}$
3. se x não estiver limitado nem por baixo, nem por cima por a ($0 \leq x \leq 2$) que ocorre quando $0 \leq a-3$ e $a+1 \leq 2$ que implicam em $a \in (3, 5)$, a integral é $\frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$

desse jeito fica mais fácil.

6) Sejam X e Y v.a. independentes, $X \sim U(0, 1)$ e $Y \sim exp(\lambda)$. Calcule a densidade de $Z = X/Y$.

Resp. 6)

Por independência de X e Y temos que

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-\lambda y}, & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } y > 0, \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

Deduzimos que $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X/Y \leq z) = P(Y \geq X/z) = \int_0^1 \int_{x/z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy dx = \frac{z}{\lambda} (1 - e^{-\lambda/z})$, se $z > 0$ e $F_Z(z) = 0$ senão.

Derivando obtemos

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda/z}) - \frac{1}{z} e^{-\lambda/z}, & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{senão.} \end{cases}$$

Obs: O exercício sai de maneira mais fácil ao colocarmos em termos de Y , não de X .

7) Sejam X_1, X_2, X_3 v.a. i.i.d. exponenciais com parâmetro $\lambda = 1$. Calcule:

**) A ideia aqui é que a função min (ou max), nos dá uma informação importante sobre todas as suas variáveis, por exemplo:*

$\min(a, b, c, d, e) = 1$, isso nos informa que todos são pelo menos maiores que 1, ou seja, $a \geq 1$ e $b \geq 1$ e $c \geq 1$ e $d \geq 1$ e $e \geq 1$. Do mesmo jeito

$\max(a, b, c, d, e) = 1$, isso nos informa que todos são pelo menos menores que 1, ou seja, $a \leq 1$ e $b \leq 1$ e $c \leq 1$ e $d \leq 1$ e $e \leq 1$.

(a) $P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq a)$

Resp. a) $P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq a) = P(X_1 \leq a, X_2 \leq a, X_3 \leq a) \stackrel{iid}{=} P(X_1 \leq a)^3 = (1 - e^{-a})^3$

(b) $P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq a)$

Resp. b)

$P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq a) = P(X_1 \geq a, X_2 \geq a, X_3 \geq a) \stackrel{iid}{=} (1 - P(X_1 \leq a))^3 = e^{-3 \cdot a}$

(c) densidade de $Z = \min\{X_1, X_2, X_3\}$

Resp. c)

$$f_Z(a) = \frac{dF_Z(a)}{da} = \frac{dP(\min\{X_1, X_2, X_3\} \leq a)}{da} = \frac{d(1 - P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq a))}{da} = \frac{d1}{da} - \frac{dP(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq a)}{da} = 0 - \frac{d(e^{-3 \cdot a})}{da} = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3 \cdot a} & \text{se } a \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

8) O número dos clientes que entram numa loja durante uma hora tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 12$. Cada cliente compra alguma coisa com probabilidade $1/4$ e não compra nada com probabilidade $3/4$ independentemente dos outros. Se entre 12:00 e 13:00 entraram exatamente 10 clientes, qual é a probabilidade que pelo menos 2 compraram alguma coisa? Se entre 13:00 e 14:00 exatamente 8 clientes não compraram nada, qual é a probabilidade que pelo menos 2 compraram alguma coisa?

Resp. 8)

#clientes que entram na loja: $E \sim \text{Poisson}(12)$

cada cliente compra com prob $1/4 \implies C \sim \text{Bernoulli}(1/4)$ independentes

- Entre 12 e 13 horas entram exatamente 10 clientes. Sabemos que todos compram independente dos outros seguindo uma Bernoulli($1/4$), o número

total de clientes que compraram é uma somatória de Bernoulli, ou seja uma Binomial, com parâmetros 10 (quantos clientes entraram) e $1/4$ (a probabilidade de cada um comprar algo), daí temos: $B \sim \text{Binomial}(10, \frac{1}{4})$,

$$P(B \geq 2) = 1 - P(B = 0) - P(B = 1) = 1 - \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 - \left(\frac{10}{0}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

- Denotando por X o número de clientes que compram entre 13h00 e 14h00, e por Y o número de clientes que não compram entre 13h00 e 14h00, queremos calcular $P(X \geq 2 | Y = 8)$. Sabemos que X e Y são independentes (cf. Ross Cap. 6, Exemplo 2b) e têm leis de Poisson com parâmetros respectivos $12 \times \frac{1}{4}$ e $12 \times \frac{3}{4}$. Portanto, $P(X \geq 2 | Y = 8) = P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-3}(1 + 3)$.

9) Um casal combina de se encontrar por volta de 12:30. O homem chega num momento distribuído uniformemente entre 12:15 e 12:45, a mulher chega num momento distribuído uniformemente entre 12:00 e 13:00.

Uma observação aqui é o cuidado com a representação das horas, podemos por exemplo representar como minutos, ou frações de hora. Eu acho que é mais fácil trabalhar com minutos e depois converter, da seguinte maneira:

seja H a variável aleatória que representa a hora que o Homem vai chegar ao local e $D_H \sim U(15, 45)$. Dessa forma : $H = D_h + 12 \cdot 60$ min

seja M a v.a. que representa a hora que a Mulher vai chegar ao local e $D_M \sim U(0, 60)$. Dessa forma : $M = D_M + 12 \cdot 60$ min

Por causa das propriedades da uniforme:

- $f_{D_H}(h) = \frac{1}{30} \cdot \mathbf{I}_{h \in (15, 45)}$
- $f_{D_M}(m) = \frac{1}{60} \cdot \mathbf{I}_{m \in (0, 60)}$

a) Qual é a probabilidade de que primeiro a chegar terá de esperar mais de 15 minutos?

$$P(H - M > 15 \cup M - H > 15) = P(H - M > 15) + P(M - H > 15)$$

Calculando cada parcela temos:

- $P(M - H > 15) = P(M > 15 + H) = P(D_M > 15 + D_H) = \int \int_{m > 15+h} f(m, h) dm dh = \int \int_{m > 15+h} f_{D_M}(m) \cdot f_{D_H}(h) dm dh =$

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{15+h}^{\infty} \mathbf{I}_{h \in (15,45)} \cdot \mathbf{I}_{m \in (0,60)} dm dh = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{15}^{45} \int_{15+h}^{60} dm dh = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{15}^{45} (60 - 15 - h) dh = \frac{30 \cdot 60 - 15 \cdot 30 - \frac{h^2}{2} \Big|_{h=15}^{h=45}}{60 \cdot 30} = 0,25$$

$$\bullet P(H - M > 15) = P(H > 15 + M) = P(D_H > 15 + D_M) = \int \int_{h > 15+m} f(m, h) dm dh = \int \int_{h > 15+m} f_{D_M}(m) \cdot f_{D_H}(h) dm dh =$$

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{15+m}^{\infty} \mathbf{I}_{h \in (15,45)} \cdot \mathbf{I}_{m \in (0,60)} dh dm \stackrel{**}{=} \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} \int_{15+m}^{45} dh dm = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} (45 - 15 - m) dm = \frac{45 \cdot 30 - 15 \cdot 30 - \frac{m^2}{2} \Big|_{m=0}^{m=30}}{60 \cdot 30} = 0,25$$

****) observe que nã integramos até 60 pois para valores maiores que 30, a segunda integral se torna 0 por causa do problema de intervalos discutido na questão 5*

$$\text{assim a resposta é: } P(H - M > 15 \cup M - H > 15) = P(H - M > 15) + P(M - H > 15) = \frac{1}{2}$$

b) Qual é a probabilidade de que o homem vai chegar primeiro?

$$\bullet P(M - H > 0) = P(M > H) = P(D_M > D_H) = \int \int_{m > h} f(m, h) dm dh = \int \int_{m > h} f_{D_M}(m) \cdot f_{D_H}(h) dm dh =$$

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_h^{\infty} \mathbf{I}_{h \in (15,45)} \cdot \mathbf{I}_{m \in (0,60)} dm dh = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{15}^{45} \int_h^{60} dm dh = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{30} \cdot \int_{15}^{45} (60 - h) dh = \frac{60 \cdot 30 - \frac{h^2}{2} \Big|_{m=15}^{m=45}}{60 \cdot 30} = \frac{1}{2}$$

10) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x; y) = \begin{cases} x + y; & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \text{ Calcule a densidade condicional de } X \text{ dado que } Y = y.$$

Resp. 10)

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{x+y}{\int_0^1 (x+y) dx} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{I}_{(0,1)^2}(x,y).$$

11) Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes, X_i tem distrib. de Poisson com parâmetro λ_i , $i = 1, 2$. Seja $Z = X_1 + X_2$. Calcule a distrib. condicional de X_1 dado que $Z = n$.

Resp. 11)

$$\bullet X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \implies f_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1^{x_1}}{x_1!}$$

$$\bullet X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \implies f_{X_2}(x_2) = \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^{x_2}}{x_2!}$$

$$\bullet P(X_1 = k / X_1 + X_2 = n) = \frac{P(X_1=k, X_1+X_2=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \stackrel{\text{indep.}}{=} \\ \frac{P(X=k) \cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \stackrel{*}{=} \frac{\frac{e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \frac{\lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \cdot \binom{n}{k}$$

Portanto deduzimos que a lei condicional de X_1 dado que $Z = n$ é a lei binomial com parâmetros n e $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

*) Na página 319 do Ross temos que se $X_1, X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_{1,2})$ e $Z = X_1 + X_2$ então $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$

12) A distrib. conjunta de X, Y e Z é dada por $p(1, 2, 3) = p(2, 1, 1) = p(2, 2, 1) = p(2, 3, 2) = \frac{1}{4}$: Calcule $\mathbf{E}(XYZ)$ e $\mathbf{E}(XY + XZ + YZ)$.

Resp. 12)

a) temos que $g(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ com isso e a equação 8 temos:

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} g(x, y, z) \cdot p(x, y, z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4} = \frac{24}{4}$$

b) pela propriedade linear da esperança temos:

$$\mathbf{E}(XY + XZ + YZ) = \mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(XZ) + \mathbf{E}(YZ), \text{ disso}$$

$$\mathbf{E}(XY + XZ + YZ) = \mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(XZ) + \mathbf{E}(YZ) = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{4} + \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{4} = \frac{40}{4}$$

13) Sejam X, Y e Z v.a. i.i.d. que assumem valores 1 e 2 com prob. $\frac{1}{2}$. Ache a distrib. de XYZ e $X^2 + YZ$.

Resp. 13) todas as 3-uplas possíveis são:

$(1, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 2)$ observe que a probabilidade de X, Y, Z é $\frac{1}{2}$ tanto para 1 quanto para 2

dado que $g(X, Y, Z) = X \cdot Y \cdot Z$ temos

- $P(g(x, y, z) = 1) = \frac{1}{8}$
- $P(g(x, y, z) = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(g(x, y, z) = 3) = 0$
- $P(g(x, y, z) = 4) = \frac{3}{8}$
- $P(g(x, y, z) = 5) = 0$
- $P(g(x, y, z) = 6) = 0$
- $P(g(x, y, z) = 7) = 0$

- $P(g(x, y, z) = 8) = \frac{1}{8}$

nesse caso, temos $h(X, Y, Z) = X^2 + Y \cdot Z$

- $P(h(x, y, z) = 1) = 0$

- $P(h(x, y, z) = 2) = P(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{1}{8}$

- $P(h(x, y, z) = 3) = P(x = 1, y = 2, z = 1) + P(X = 1, Y = 1, Z = 2) = \frac{2}{8}$

- $P(h(x, y, z) = 4) = 0$

- $P(h(x, y, z) = 5) = P(x = 2, y = 1, z = 1) + P(X = 1, Y = 2, Z = 2) = \frac{2}{8}$

- $P(h(x, y, z) = 6) = P(x = 2, y = 2, z = 1) + P(X = 2, Y = 1, Z = 2) = \frac{2}{8}$

- $P(h(x, y, z) = 7) = 0$

- $P(h(x, y, z) = 8) = P(x = 2, y = 2, z = 2) = \frac{1}{8}$

14) Sejam $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim U(0, 1)$, independentes. Ache a distrib. de $Z = X + Y$.

Resp. 14)

Temos $f_Z(z) = \sum_x f_Y(z-x)p_X(x)$

Mas pela definição da lei de Poisson, se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $f_X(x) =$

$$\begin{cases} \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad \text{com isso, obtemos para todo } z \geq 0,$$

$$f_Z(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,1)}((z-x)) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \frac{\lambda^{\lfloor z \rfloor} \cdot e^{-\lambda}}{\lfloor z \rfloor!}, \text{ em que } \lfloor z \rfloor \text{ denota a parte inteira de } z, \text{ e } f_Z(z) = 0 \text{ se } z < 0.$$

15) Seja $f(x, y) = \begin{cases} c(y-x) & \text{se } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

a) Ache o valor de c e as distrib. marginais de X e Y .

Resp. a)

$$1 = \int \int f(x, y) dx dy = c \cdot \int_0^1 \int_0^y (y-x) dx dy = c \cdot \int_0^1 (y^2 - \frac{y^2}{2}) dy = c \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} \cdot c \implies c = 6$$

b) As v.a. X e Y são independentes?

Resp. b)

Não, pois

*) lembrando que para o cálculo das marginais, calculamos: $f_X(x) = \int f(x, y) dy$ e $f_Y(y) = \int f(x, y) dx$

*) como $0 < x < y < 1$, os intervalos de integração de cada um deles são $0 < x < y$ e $x < y < 1$

- $f_Y(y) = \int_0^y 6(y-x)dx = 6y^2 - 6\frac{y^2}{2} = 3y^2 \mathbf{1}_{(0,1)}(y)$.
- $f_X(x) = \int_x^1 6(y-x)dy = 6\frac{y^2}{2} - 6xy \Big|_{y=x}^{y=1} = 6(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x) = 3(x-1)^2 \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.
- Portanto, temos que $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

16) Um dado honesto e lançado 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter duas vezes “6”, cinco vezes “5” e três vezes “1”?

Resp. 16)

Usaremos a distrib. multinomial (Ross. 291-292), cada uma com probabilidade de sucesso de um sexto

$$P(X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 3) = \frac{10!}{2!5!3!} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^5} \cdot \frac{1}{6^3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6^{10}}$$

*Este soluçono foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012.
Caso encontre algum erro, por favor peltera informando o erro em
nosso grupo de discuss*

[https : //groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012](https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012)

ou diretamente no reposit do github:

[https : //github.com/nullhack/Probabilidade2](https://github.com/nullhack/Probabilidade2)

*Bons estudos,
Eric.*